VLERËSIMET BOOTSTRAP PËR VARIANCËN E VLERËSIMEVE TË KOEFICIENTËVE TË REGRESIONIT LINEAR KUR GABIMET NUK JANË TË PAVARURA DHE ME SHPËRNDARJE TË NJËJTË

(BOOTSTRAP ESTIMATION OF LINEAR REGRESSION COEFFICIENTS VARIANCES WHEN ERRORS ARE DEPENDENT AND NOT UNIFORMLY DISTRIBUTED)

Lorenc EKONOMI
Departamenti i Shkencave Natyrore, Universiteti "Fan Noli" Korçë, Shqipëri
E-mail: *lorencekonomi@yahoo.co.uk*

Përmbledhje

Në këtë artikull propozohet një vlerësim bootstrap për variancën e koeficientëve të regresionit linear në rastin kur gabimet nuk janë të pavarura dhe me shpërndarje të njejtë. Do të tregohet se vlerësimi boostrap i propozuar ka veti të mira asimptotike dhe më tej, nëpërmjet një simulimi të kryer, arrihet një përafrim mjaft i mirë.

Fjalet kyçe: regresioni linear, gabime jo të pavarura dhe me shpërndarje të njejtë, varianca, bootstrap, proces autoregresiv

Abstract

A bootstrap estimation of the linear regression coefficients variance, when errors are not independent and do not have the same distribution is proposed in this article. The study shows that the proposed bootstrap estimation has good asimptotic qualities and can achieve a good approximation as well.

Key-words: linear regression, no independent and identically errors, variance, bootstrap, autoregressive process

1. Hyrje

Kur gabimet ishin të pavarura dhe me shpër-ndarje të njejtë, Efron [2], Freedman [4], Wu [9] treguan se vlerësimet bootstrap ishin të qendrueshëm për variancën e koeficientëve të regresionit linear. Ndërsa, kur gabimet nuk ishin të pavarura dhe me shpërndarje të njejtë, Liu dhe Singh ndërtuan vlerësimet boostrap me blloqe, të cilat gëzonin veti të mira. [7]. Më poshtë do të propozojmë një vlerësim bootstrap për variancën e koeficientëve të regresionit linear, kur gabimet nuk janë të pavarura dhe me shpërndarje të njejtë.

2. NJË VLERËSIM BOOTSTRAP

Kemi modelin e regresionit linear

$$y_i = x_i^T \beta + e_i \text{ për } i = 1,...,n \qquad (1)$$

ku x_i vektor kx1 i përcaktuar më parë, β vektor kx1 i parametrave të panjohur, e_i gabimet që plotësojnë kushtet $E(e_i) = 0$ per $i = 1,...,n$ dhe janë të korreluara, të tilla që $\mathrm{cov}(e_i, e_j) = \omega_{ij}$ për $i, j = 1,...,n$.

Futim shënimet $Y = (y_1,..., y_n)^T$; $e = (e_1,...,e_n)^T$; $X = [x_1,...,x_n]^T$; $\Omega = [\omega_{ij}]$. Modeli (1) merr pamjen: $Y = X\beta + e$ me kushte $E(e) = 0$ dhe $\mathrm{Var}(e) = \Omega$ (2)

Metoda e katrorëve më të vegjël jep vlerësimet për parametrat e panjohur β në formën:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \qquad (3)$$

Duam të ndërtojmë një vlerësim bootstrap për matricën e variancave të $\hat{\beta}$. Matrica Ω është simetrike dhe si rrjedhim ekziston matrica ortogonale C, e tillë që $C\Omega C^T = \Sigma$ të jetë matricë diagonale. [8]

Transformojmë modelin (2), duke shumëzuar me matricën C nga e majta, duke shënuar $Y_1 = CY$ dhe $X_1 = CX$. Modeli (2) do të kthehet në modelin e mëposhtëm:

$$Y_1 = X_1\beta + e_1 \quad \text{me kushte } E(e_1) = 0 \text{ dhe } \mathrm{Var}(e_1) = \Sigma = diag(\sigma_1^2,....,\sigma_n^2) \qquad (4)$$

Vlerësimi i katrorëve më të vegjël për këtë model që e shënojmë $\hat{\beta}_1$ do të jetë në formën:

$$\hat{\beta}_1 = (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T Y_1 \qquad (5)$$

Zëvendësojmë tek (5) shprehjet për X dhe Y dhe kemi:

$$\hat{\beta}_1 = (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T Y_1 = (X^T (B^T B) X)^{-1} X^T (B^T B) Y = (X^T X)^{-1} X^T Y = \hat{\beta}$$

Pra vlerësimet e katrorëve më të vegjël për modelet (2) dhe (4) përputhen. Tani do të shënojmë gjithmonë $\hat{\beta}$ dhe, sipas rastit, do të kuptojmë $\hat{\beta}_1$ ose $\hat{\beta}$.

Le të jenë përkatësisht $r_1,...,r_n$ mbetjet e marra nga modeli (4), pra $r_i = y_i - x_i^T \hat{\beta}$. Formojmë bashkësinë e çifteve $\{(x_1^T, r_1),....,(x_n^T, r_n)\}$. Ndërtojmë ndryshoren e rastit, që merr vlerat e saj në këtë bashkësi me probabilitete të barabarta me $\frac{1}{n}$. Marrim nga kjo ndryshore rasti një zgjedhje bootstrap (zgjedhje me vëllim n, ku elementet zgjidhen në mënyrë të pavarur nga kjo bashkësi dhe me kthim). Shënojmë këtë bashkësi në formën $\{(x_1^{*T}, r_1^*),...,(x_n^{*T}, r_n^*)\}$. Ndërtojmë vektorin Y^* me anë të

$$Y^* = X^* \hat{\beta} + r^* \qquad (6)$$

Atëhere $\hat{\beta}^* = (X^{*T} X^*)^{-1} X^{*T} Y^*$ (7)

do të jetë vlerësimi bootstrap për parametrat β të panjohur të modelit (2) dhe, n.q.s. marrim B zgjedhje të tilla bootstrap, vlerësimi bootstrap për variancën e $\hat{\beta}$ të modelit (2) do të jetë

$$v^* = \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^{B} (\hat{\beta}_b - \hat{\beta})(\hat{\beta}_b - \hat{\beta})^T \qquad (8)$$

Për të treguar që ky vlerësim bootstrap ka cilësi të mira, përpiqemi të tregojmë që shpërndarja e ndryshores së rastit $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \hat{\beta})$ është afërsisht e njëjtë me atë të ndryshores tjetër të rastit $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$.

Supozojmë në fillim se $\frac{1}{n} X^T X \xrightarrow{p} A_1$ dhe $\frac{1}{n} X^T \Sigma X \xrightarrow{p} A_2$ (9)

Para se të formulojmë teoremën që bazon vlerësimin bootstrap të propozuar shohim vërtetësinë e disa pohimeve që do të na ndihmojnë në vërtetimin e teoremës.

Pohim 1 N.q.s. gabimet e_i tek modeli (4) kanë momente të rendit të gjashtë, atëhere momente të po këtij rendi kanë edhe mbetjet r_i.

Vërtetim Nisemi nga:

$$r_i = y_i - x_i^T \hat{\beta} = x_i^T \left(\beta - \hat{\beta}\right) + e_i \qquad (10)$$

Meqë e_i kanë momente të rendit të gjashtë, të tilla momente do të kenë edhe y_i nga (4) dhe $\hat{\beta}$ si vlerësim linear i Y. Atëhere, nga (10) do të kenë momente të rendit të gjashtë edhe r_i. ▲

Pohim 2 N.q.s. σ_i^2 janë të kufizuar për çdo $i = 1,\dots,n$, gabimet e_i për $i = 1,\dots,n$ kanë momente të rendit të katërt dhe ka vend pjesa e parë e (9), atëhere $r_i^2 \xrightarrow{p} \sigma_i^2$.

Vërtetim Në fillim tregojmë që $E\left(r_i^2\right) \xrightarrow{p} \sigma_i^2$. Marrim pritjen matematike të katrorit të anës së majtë të (10). Kështu

$$E\left(r_i^2\right) = E\left(y_i^2\right) - 2x_i^T \left(X^T X\right)^{-1} X^T E\left(Y y_i\right) + x_i^T \left(X^T X\right)^{-1} X^T E\left(Y^T Y\right) X \left(X^T X\right)^{-1} x_i =$$

$$= \sigma_i^2 - 2w\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} w_{ij}^2 \sigma_j^2 = \left(1 - w_i\right)\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} w_{ij}^2 \left(\sigma_j^2 - \sigma_i^2\right)$$

ku $w_i = x_i^T \left(X^T X\right)^{-1} x_i$ dhe $w_{ij} = x_i^T \left(X^T X\right)^{-1} x_j$ për $i, j = 1,\dots,n$. Kjo, sepse, nga $X^T X = \sum_{j=1}^{n} x_j x_j^T$, do të kemi $\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^2 = w_i$. Atëhere meqë $\sigma_i^2 \le c$ për $i = 1,\dots,n$, rrjedh se, $E\left(r_i^2\right) \le \left(1 - w_i\right)\sigma_i^2 + 2cw_i$. Gjithashtu, n.q.s. $\sigma_i^2 \ge c_1$, do të kemi që $E\left(r_i^2\right) \ge \left(1 - w_i\right)\sigma_i^2 - 2c_1 w_i$. Por w_i mund të shprehet në formën $w_i = \frac{x_i^T}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{n} X^T X\right)^{-1} \frac{x_i}{\sqrt{n}}$. Meqë ka vend pjesa e parë e (9), do të kemi $w_i \xrightarrow{p} 0$. [8] Duke kaluar në limit, kur $n \to \infty$, tek të dy mosbarazimet e marra për $E\left(r_i^2\right)$ do të marrim që $E\left(r_i^2\right) \xrightarrow{p} \sigma_i^2$.

Tregojmë tani që $r_i^2 - E\left(r_i^2\right) \xrightarrow{p} 0$. Nga lidhja (10) shohim se n.q.s. e_i kanë momente të rendit të katërt, atëhere $\mathrm{Var}\left(r_i^2\right)$ janë të kufizuar. Si rrjedhim, nga mosbarazimi i Çebishovit marrim

$1 \le p\left(\left|r_i^2 - E\left(r_i^2\right)\right| < \frac{1}{n}\right) \le 1 - \frac{c_2}{n}$ ku c_2 e tillë që $\mathrm{Var}\left(r_i^2\right) \le c_2$ per $i = 1,\dots,n$. Duke kaluar në limit kur $n \to \infty$ marrim që $r_i^2 - E\left(r_i^2\right) \xrightarrow{p} 0$, që çon në vërtetësinë e pohimit. ▲

Pohim 3 N.q.s. elementet e matricës X janë të kufizuar dhe $r_i^2 \xrightarrow{p} \sigma_i^2$, atëhere $\frac{1}{n} X^T diag\left(r_1^2,\dots,r_n^2\right) X - \frac{1}{n} X^T diag\left(\sigma_1^2,\dots,\sigma_n^2\right) X \xrightarrow{p} 0$.

Vërtetim Meqë $r_i^2 \xrightarrow{p} \sigma_i^2$, mund të shkruajmë që $r_i^2 = \sigma_i^2 + o_p(1)$. (ku $o_p(1)$ konvergjon në zero sipas probabilitetit kur $n \to \infty$).

Elementet e matricës $\frac{1}{n}X^T diag\left(r_1^2,...,r_n^2\right)X$ (në rreshtin e i-të dhe shtyllën e j-të të saj) do të jenë të trajtës $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{it}x_{jt}r_t^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{it}x_{jt}\sigma_t^2 + \frac{o_p(1)}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{it}x_{jt}$. Termi i djathtë është i kufizuar dhe si rrjedhim ai është i formës $o_p(1)$. Kështu, mund të shkruajmë që $\frac{1}{n}X^T diag\left(r_1^2,...,r_n^2\right)X - \frac{1}{n}X^T diag\left(\sigma_1^2,...,\sigma_n^2\right)X = o_p(1)$, që tregon vërtetësinë e pohimit.▲

<u>Pohim 4</u> N.q.s. $A_n \xrightarrow{p} A$ atëhere $A_n^{-1} \xrightarrow{p} A^{-1}$, ku A_n per $\forall n \in N$ dhe A matrica të të njëjtit rend që kanë të anasjelltë.

<u>Vërtetim</u> Elementet e matricave A_n^{-1} dhe A^{-1} janë funksione të vazhdueshëm të elementeve të matricave A_n dhe A, atëhere sipas teoremës së Slutsky [8], rrjedh se elementet e matricës A^{-1} janë limite sipas probabilitetit të elementeve të matricave A_n^{-1}. Pohimi u vërtetua.▲

Ka vend teorema e mëposhtme:

<u>Teoremë</u> N.q.s. gabimet e_i per $i = 1,...,n$ kanë momente të rendit të gjashtë atëhere

$$\lim_{n\to\infty}\left\| p\left(\sqrt{n}\left(\hat{\beta}^* - \hat{\beta}\right) < x\right) - p\left(\sqrt{n}\left(\hat{\beta} - \beta\right) < x\right)\right\|_\infty = 0 \qquad (11)$$

ku $\|\ \|_\infty$ është perdorur për $\sup_{x\in R}|\ |$.

<u>Vërtetim</u> Zëvendësojmë tek shprehja (7) për $\hat{\beta}^*$, shprehjen (6) dhe do të marrim

$$\hat{\beta}^* = \left(X^{*T}X^*\right)^{-1}X^{*T}\left(X^*\hat{\beta} + r^*\right) = \hat{\beta} + \left(X^{*T}X^*\right)^{-1}X^{*T}r^*$$

ose
$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}^* - \hat{\beta}\right) = \left(\frac{1}{n}X^{*T}X^*\right)^{-1}\frac{X^{*T}r^*}{\sqrt{n}} \qquad (12)$$

Shohim termin $\frac{X^{*T}r^*}{\sqrt{n}}$. Atëhere
$$\frac{X^{*T}r^*}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} x_i^* r_i^* \qquad (13)$$

Vëmë re se termat e shumës (13) janë ndryshore rasti të pavarura, që marrin vlera në bashkësinë $\{x_1 r_1,...,x_n r_n\}$ me probabilitete të njëjta të barabarta me $\frac{1}{n}$. Do të kemi

$$E\left(x_i^* r_i^*\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = X^T r = 0 \qquad (14)$$

sepse $X^T r = X^T\left(Y - X\hat{\beta}\right) = X^T\left(Y - X\left(X^T X\right)^{-1}X^T Y\right) = X^T Y - X^T X\left(X^T X\right)^{-1}X^T Y =$

$= X^T Y - X^T Y = 0$

Ndërsa $\mathrm{Var}\left(x_i^{*T}r_i^*\right) = E\left(x_i^* x_i^{*T} r_i^{*2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_i^T r_i^2 = \frac{1}{n}X^T diag\left(r_1^2,....,r_n^2\right)X \qquad (15)$

(ndryshorja e rastit $x_i^* x_i^{*T} r_i^{*2}$ merr vlera në bashkësinë $\left\{x_1 x_1^T r_1^2,....,x_n x_n^T r_n^2\right\}$ me probabilitete të barabarta me $\frac{1}{n}$)

Duke zbatuar Teoremën e Berry-Essen në rastin k-përmasor [1] do të kemi

$$\sup_{x\in R}\left| p\left(\frac{X^{*T} r^*}{\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \le \frac{cE\left\| x_i^* r_i^* \right\|^3}{\sqrt{n}} \tag{16}$$

ku $\| \ \|$ është norma Euklidiane dhe $\Phi(x)$ funksioni i shpërndarjes i ndryshores së rastit normale me pritje matematike 0 dhe matricë të variancave $\frac{1}{n} X^T diag\left(r_1^2,....,r_n^2\right)X$. Nga supozimi që e_i kanë momente të rendit të gjashtë dhe pohimi 1, rrjedh se, $E\left\| x_i^* r_i^* \right\|^3$ është madhësi e kufizuar, ose

$$\sup_{x\in R}\left| p\left(\frac{X^{*T} r^*}{\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \le \frac{c_1}{\sqrt{n}} \tag{17}$$

ose $$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R}\left| p\left(\frac{X^{*T} r^*}{\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| = 0 \tag{18}$$

ku $\Phi(x)$ funksioni i shpërndarjes i ndryshores së rastit normale me pritje matematike 0 dhe matricë të variancave $\frac{1}{n} X^T diag\left(r_1^2,....,r_n^2\right)X$. Duke u nisur nga pohimi 3 arrijmë në barazimin e mëposhtëm

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R}\left| p\left(\frac{X^{*T} r^*}{\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| = 0 \tag{19}$$

ku $\Phi(x)$ është funksioni i shpërndarjes i ndryshores së rastit normale me pritje matematike 0 dhe matrice të variancave A_2.

Shohim tani termin $\left(\frac{1}{n} X^{*T} X^*\right)^{-1}$. Nisemi nga $\frac{1}{n} X^{*T} X^*$ dhe kemi $\frac{1}{n} X^{*T} X^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i^{*T}$. Ndryshoret e rastit $x_i^* x_i^{*T}$ për $i = 1,...,n$ kanë shpërndarje të njëjtë dhe janë të pavarura. Pritja matematike e tyre do të jetë $E\left(x_i^* x_i^{*T}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_i^T = \frac{1}{n} X^T X$. Meqë pritja matematike e tyre ekziston, sipas teoremes se Hincinit [shih 8] ndryshorja e rastit $\frac{1}{n} X^{*T} X^*$, që përfaqëson mesataren aritmetike të tyre, konvergjon sipas probabilitetit tek pritja matematike e tyre, pra tek $\frac{1}{n} X^T X$. Nga Pohimi 4, rrjedh që $\left(\frac{1}{n} X^{*T} X^*\right)^{-1}$ konvergjon sipas probabilitetit tek $\left(\frac{1}{n} X^T X\right)^{-1}$. Duke shumëzuar me $\left(\frac{1}{n} X^{*T} X^*\right)^{-1}$ nga e majta ndryshoren e rastit $\frac{X^* r^*}{\sqrt{n}}$ bazuar tek (19) do të kemi që

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R}\left| p\left(\left(\frac{1}{n} X^{*T} X^*\right) \frac{X^{*T} r^*}{\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| = 0 \tag{20}$$

ose $$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R}\left| p\left(\sqrt{n}\left(\hat{\beta}^* - \hat{\beta}\right) < x \right) - \Phi(x) \right| = 0 \tag{21}$$

ku $\Phi(x)$ ndryshore rasti normale me pritje matematike 0 dhe matrice të variancave të barabartë me $A_1 A_2^{-1} A_1$

Tregohet [shih 6] se ndryshorja e rastit $\sqrt{n}\left(\hat{\beta}-\beta\right) \xrightarrow{D} N\left(0; A_1^{-1}A_2A_1^{-1}\right)$. Atëhere sipas teoremës së Polya [shih 8] rrjedh se

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R}\left|p\left(\sqrt{n}\left(\hat{\beta}-\beta\right)<x\right)-\Phi(x)\right|=0 \tag{22}$$

ku $\Phi(x)$ ndryshore rasti normale k - përmasore me matrice të variancave $A_1^{-1}A_2A_1^{-1}$.

Atëhere duke zbatuar mosbarazimin e trekëndëshit të distancës do të kemi

$$\sup_{x\in R}\left|p\left(\sqrt{n}\left(\hat{\beta}^*-\hat{\beta}\right)<x\right)-p\left(\sqrt{n}\left(\hat{\beta}-\beta\right)<x\right)\right|\leq$$

$$\leq\sup_{x\in R}\left|p\left(\sqrt{n}\left(\hat{\beta}^*-\hat{\beta}\right)<x\right)-\Phi(x)\right|+\sup_{x\in R}\left|p\left(\sqrt{n}\left(\hat{\beta}-\beta\right)<x\right)-\Phi(x)\right| \tag{23}$$

ku $\Phi(x)$ ndryshore rasti normale k - përmasore me matrice të variancave $A_1^{-1}A_2A_1^{-1}$. Duke bashkuar tani (21) dhe (22) shohim vërtetësinë e teoremës.▲

<u>3. Simulime</u> Le të kemi modelin $y_i = x_i^T\beta + e_i$ ku $e_i = \rho e_{i-1} + u_i$ për $i = 1,\dots,n$ (24)

dhe $E(u)=0;\ \mathrm{Var}(u)=\sigma^2 I$ ku $u^T=(u_1,\dots,u_n)$, ndërsa y_i, x_i, β janë përcaktuar si tek modeli (1).

Modeli i mësipërm paraqet një proces autoregresiv të rendit të parë AR(1). Shihet lehtë që pas zëvendësimeve të njëpasnjëshme kemi: $e_i = u_i + \rho u_{i-1} + \rho^2 u_{i-2} + \dots$ (25)

prej nga gjejmë $E(e_i)=0$. Duke ngritur barazimin (25) në katror nga të dy anët dhe duke gjetur pritjen matematike të të dy anëve, do të kemi

$$E\left(e_i^2\right)=\sigma^2\left(1+\rho^2+\rho^4+\dots\right)=\sigma^2\frac{1}{1-\rho^2} \tag{26}$$

me kushtin që $|\rho|<1$. Njësoj marrim që $E\left(e_ie_{i-s}\right)=\sigma^2\frac{\rho^s}{1-\rho^2}$.

Pra modeli (24) mund të shkruhet në formën

$$y_i=\beta x_i^T+e_i \text{ ku } E(e)=0;\ \mathrm{Var}(e)=\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\Sigma=\sigma_u^2\Omega \text{ ku}$$

$$\sigma_e^2=\frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \text{ dhe } \Omega=\begin{bmatrix}1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1}\\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2}\\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1\end{bmatrix} \tag{27}$$

pra në një model të regresionit linear me gabime, që nuk janë të pavarura dhe me shpërndarje të njejtë.

Thjeshtojmë problemin duke pranuar që modeli i mësipërm ka pamjen $y_i = 10.0x_{i1} + 0.4x_{i2} + 0.6x_{i3} + e_i$ dhe $\sigma^2 = 0.0625$, ndërsa matrica e ndryshores së pavarur X është e dhene. [5] Gjenerojme vlerat e vektorit u për të vleresuar varianceet dhe devijimet standarte të vlerësimeve të katrorëve më të vegjel $\hat{\beta}$ të parametrave të vërtetë β. Fillimisht duhet të gjejmë një matrice ortogonale C të tillë që $C\Omega C^T=\Sigma$ ku matrica Σ është matricë diagonale. Një matricë e tillë është matrica që ka si kolona vektorët e normuar të matricës Ω dhe diagonalja e matricës Σ, është e përbërë nga vlerat e matricës Ω. Për gjetjen e vlerave të veta të matricës Ω përdorim metodën e Jakobit. Duke zbatuar atë për *k = 1000* u morën vlerat e kësaj matrice me një precizion mjaf të kënaqshëm. Për secilën vlerë λ_i per $i=1,\dots,n$ të gjetur, u gjet vektori i vet duke zgjidhur sistemin $(\Omega-\lambda_i I)X=0$. U vu re një diagonalizim mjaft i mirë i matricës Ω. Më pas u zbatua metoda bootstrap e propozuar në paragrafin 2 . Variabilitetet (raporti i vlerës absolute të diferencës së mesatares së vlerësimeve me vlerën e vërtetë të parametrave ndaj vlerës së vertetë të parametrave) e vlerësimeve bootstrap të marra nga 1000 zgjedhje bootstrap për variancat dhe devijimet standarte të vlerësimeve $\hat{\beta}$ jepen në tabelat e mëposhtme. Me simbolin (*i, j*) është shënuar kovarianca midis variablit të *i*-të dhe të *j*-të. Në të dy tabelat vihet re, në përgjithësi, një vlerësim mjaft i mirë për matricën e dispersioneve dhe vlerësimeve standarde të parametrit të panjohur β. Po kështu vihet re një mungese e ndikimit të ρ, ndërkohë që vlerësimi jackknife për vlera të mëdha të ρ në vlerë absolute, jep vlerësime të ekzagjeruara [3]. Megjithatë vihet re një vlerësim jo i mirë për (1, 2) pavarësisht nga vlera e ρ. Kjo sepse vlera e vërtetë e parametrit (1, 2) është mjaft e vogël.

ρ	0.999	0.99	0.95	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20
(1,1)	-0.97	-0.77	-0.14	0.12	0.27	0.42	0.38	0.64	0.69	0.73	0.77
(1,2)	-1.95	-2.47	-1.36	-0.74	-0.46	-0.62	-0.70	-0.88	-0.91	-0.90	-0.89
(1,3)	-1.81	-3.13	-1.48	-0.69	-0.29	-0.34	-0.24	-0.35	-0.25	-0.13	-0.02
(2,2)	1.15	1.41	1.01	0.83	0.87	1.11	1.10	1.28	1.21	1.11	1.03
(2,3)	-0.63	-2.08	0.20	-0.10	-0.30	-0.20	-0.76	-0.17	-0.34	-0.69	-1.60
(3,3)	0.69	1.78	1.19	0.86	0.71	0.78	0.50	0.65	0.49	0.34	0.24
ρ	0.10	0.08	0.05	0.001	-0.001	-0.05	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.50
(1,1)	0.83	0.85	-0.01	-0.04	0.91	0.89	0.86	0.77	0.75	0.67	0.55
(1,2)	-0.87	-0.86	-0.19	-0.03	-0.85	-0.93	-1.03	-0.89	-1.52	-1.77	-1.96
(1,3)	0.06	0.08	0.32	0.00	0.12	0.13	0.14	-0.02	0.18	0.22	0.27
(2,2)	0.96	0.95	0.44	0.84	0.92	0.90	0.89	1.03	0.83	0.72	0.53
(2,3)	-2.29	-8.54	-6.83	-8.67	-1.91	-1.10	-0.73	-1.60	-0.11	0.08	0.28
(3,3)	0.18	0.17	-0.01	1.02	0.16	0.12	0.08	0.24	-0.56	-0.14	-0.24
ρ	-0.60	-0.70	-0.80	-0.90	-0.95	-0.99	-0.999				
(1,1)	0.40	0.25	0.09	-0.11	-0.30	-0.73	-0.96				
(1,2)	-2.01	-1.82	-1.35	-1.32	-16.81	-1.37	-1.03				
(1,3)	0.31	0.32	0.30	0.40	0.61	0.90	0.98				
(2,2)	0.26	-0.04	-0.31	-0.42	-0.36	-0.47	-0.88				
(2,3)	0.47	0.63	0.72	0.71	0.68	0.83	0.97				
(3,3)	-0.34	-0.43	-0.48	-0.53	-0.61	-0.86	-0.98				

Tabela 1. Variabilitet e vlerësimeve të variancave të $\hat{\beta}$ me metodën bootstrap të mësipërme.

ρ	0.999	0.99	0.95	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20
$\hat{\beta}_1$	-0.85	-0.52	-0.07	0.06	0.12	0.19	0.17	0.28	0.30	0.31	0.33
$\hat{\beta}_2$	0.46	0.55	0.42	0.35	0.36	0.45	0.45	0.51	0.48	0.45	0.42
$\hat{\beta}_3$	0.30	0.66	0.48	0.36	0.31	0.33	0.23	0.28	0.22	0.16	0.11
ρ	0.10	0.08	0.05	0.001	-0.001	-0.05	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.50
$\hat{\beta}_1$	0.35	0.36	0.00	-0.02	0.38	0.37	0.36	0.33	0.32	0.29	0.24
$\hat{\beta}_2$	0.40	0.39	0.20	0.35	0.38	0.37	0.37	0.42	0.35	0.31	0.23
$\hat{\beta}_3$	0.08	0.08	0.00	0.42	0.07	0.06	0.09	0.11	-0.02	-0.07	-0.13
ρ	-0.60	-0.70	-0.80	-0.90	-0.95	-0.99	-0.99				
$\hat{\beta}_1$	0.18	0.11	0.04	-0.05	-0.16	-0.48	-0.81				
$\hat{\beta}_2$	0.12	-0.02	-0.17	-0.24	-0.20	-0.27	-0.66				
$\hat{\beta}_3$	-0.19	-0.24	-0.28	-0.31	-0.37	-0.63	-0.87				

Tabela 2. Si tabela 1, por për devijimet standarte të vlerësimeve të variancave të $\hat{\beta}$

BIBLIOGRAFIA

1. Breiman, L. (1968) *Probability*, Addison – Wesley Publishing Company Inc.

2. Efron, B. (1982) *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans*. SIAM.

3. Ekonomi L., Butka A. (2001) *Vlerësimet jackknife për variancat e koeficientëve të regresionit linear kur gabimet nuk janë të pavarura dhe me shpërndarje të njejtë*. Buletini No. 3. Universiteti "Fan S. Noli" Korçë.

4. D. A. Freedman, D. A. (1981) *Bootstraping Regression Models*. The Annals of Statistics. Vol. 9 No. 8

5. Judge, G. G. Carter, H. R. Griffiths, W. E. Lutkepohl, H. Lee, T.C. (1989) *Intoduction to the Theory and Practice of Econometrics,* John Wiley & Sons

6. Johnston, J. (1984) *Econometric Methods*. McGraw-Hill New York

7. Liu, R.Y., Singh, K. (1992) *Moving blocks jackknife and bootstrap capture weak dependence. Exploring the limits of the bootstrap.* Wiley New York

8. Rao, C. R. (1973) *Linear Statistical Inference and his Applications*. John Wiley&Sons

9. Wu, C.F.J. (1986) *Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis*. The Annals of Statistics. Vol. 14 No. 4