

INVERTIMI I OPERATORIT TË MBULIMIT ME ANË TË ALGORITMIT ME DY RRJETA NË QCD-NË RRJETORE

AFINA XHAKO^a, ARTAN BORIÇI^a

Departamenti i Fizikës, Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Universiteti i Tiranës, Blv. Zog I, Tiranë, Shqipëri
Email: dafinaxhako@yahoo.com

AKTET IV, 3: 384 - 391, 2011

PERMBLEDHJE

Një mënyrë efikase e zgjidhjes së sistemeve lineare që burojnë prej barazimeve diferenciale të diskretizuara në rrjeta, është ajo e përdorimit të rrjetave të shumëfishta. Konkretisht, përdorimi i algoritmit me dy rrjeta ka si synim të reduktojë mbetjen në një rrjetë më të rrallë se rrjeta mbi të cilën kërkohet zgjidhja e problemit; të zgjidhë problemin në rrjetën më të rrallë dhe të interpolojë zgjidhjen në rrjetën e dendur, pra në rrjetën origjinale. Këto hapa iterohen derisa norma e mbetjes të bëhet më e vogël se një tolerancë e paracaktuar. Në këtë punim, kemi implementuar algoritmin e mësipërm në rastin e operatorit kiral të Dirac-ut në rrjetë, operatorin e mbulimit të Neuberger-it. Në mënyrë që të përdoret algoritmi i rrjetave të shumëfishta në rastin tonë, shfrytëzohet njëvlefshmëria e operatorit të mbulimit me atë të fermioneve të shkurtuara të mbulimit në 5 përmasa hapësinore-kohore Euklidiane. Algoritmi me dy rrjeta, i zbatuar përgjatë përmasës së 5-të Euklidiane, rezulton 6-herë më i shpejtë se algoritmet standarte të nënhapësirave të Krilovit për konstantet e çiftimit $\beta = 5.8, 5.7, 5.6, 5.5$ dhe masa kuarkesh të caktuara.

Fjalë kyçe: algoritmi me dy rrjeta, fermionet e shkurtuara të mbulimit, invertimi i operatorit në rrjetë, sisteme lineare.

SUMMARY

An efficient way to solve linear systems arising from lattice discretizations of differential equations is using the multigrid algorithm. Specifically, the two-grid algorithm reduces the residual error on a coarser lattice. Then the problem is solved then on this grid and the solution is interpolated back on the fine grid, which is finally used to calculate the residual error of the original linear system. These steps are iterated until the norm of the residuals becomes less than a given tolerance. Our specific application comes from lattice quantum chromo dynamics with chiral fermions. We want to solve linear systems which are chiral and dense discretizations of the Dirac operator, the so-called overlap operator. We use the equivalence of the overlap operator with the truncated overlap operator, which is a five dimensional formulation of the same theory. The coarsening is performed along the fifth dimension only. Our study focuses in the range of coupling constants and quark masses for which the algorithm is fast and saves a factor of 6 compared to the standard Krylov subspace methods.

Key words: multigrid algorithm, lattice QCD, chiral fermions, overlap operator, solution of large scale linear systems.

1. HYRJJE

Kromodinamika kuantike (Quantum Chromodynamics, QCD) është një teori e bashkëveprimeve të forta që përshkruan sjelljen e kuarkeve dhe gluoneve të cilat janë të mbyllura në hadrone si protone, neutrone ose pi-mezone. Ajo karakterizohet nga dy veti të rëndësishme:

a) *Mbyllësia e kuarkeve* lidhet me faktin se kuarket dhe gluonet nuk vrotohen të lira në natyrë. Ajo manifestohet në forcat e bashkëveprimit midis kuarkeve të cilat nuk zvogëlohen me largimin e tyre. Për këtë arsye do të duhej një energji "infinite" për të ndarë dy kuarke; ato janë të *mbyllura* në hadrone.

Mbyllësia e kuarkeve, edhe pse e pa provuar analitikisht, është evidentuar me anë të simulimeve të shumta të QCD-së në rrjetë. Me të vërtetë, QCD-ja është një teori që ka një fazë të vetme në temperatura të ulta, vetëm fazën e mbyllësisë së kuarkeve.

b) *Liria asimptotike* është dukuria që lidhet me faktin se në reaksione të energjive të larta, kuarket sillen si të lira. Në këtë mënyrë, çdo teori kuantike e fushës që do të ndërtohej mbi bazën e fushave të kuarkeve do të duhet të ketë vetinë e mbyllësisë dhe lirisë asimptotike.

QCD është me shumë interes për t'u studiuar dhe trajtuar, pasi hadronet përbëjnë 99.99 përqind të lëndës së dukshme të Gjithësisë e cila vlerësohet të jetë vetëm 4 përqind e energjisë totale. Zgjidhjet perturbative në QCD janë të pamundura në regjimin e hadroneve në barazpeshë për shkak të jolinearitetit të bashkëveprimeve gluonike. Për regjime të energjive të larta QCD perturbative është një përjasje mjaft e mirë, e bazuar në lirinë asimptotike, e cila e lejon teorinë e perturbimit të përdoret për të përshkruar saktësisht eksperimente të energjive të larta, siç është rasti i Eksperimenteve në Goditësin e Madh të Hadroneve (ose Large Hadron Collider, LHC)[5]. Ndërsa për regjime jo-perturbative metoda më e mirë e njohur sot për sot është metoda llogaritëse e QCD-së rrjetore (Lattice QCD-LQCD). U propozua nga Wilson (1974) si një zgjidhje joperturbative e energjive të ulta të QCD, duke diskretizuar hapësirë-kohën katërpërmasore në një rrjetë hiper-kubike me gjeometri Euklidiane. Duke patur vetëm një numër të fundëm të nyjeve të rrjetës, madhësitë fizike mund të llogariten numerikisht duke zgjidhur një integral të rendeve të larta me metodat Monte Carlo [9]. Ky formulim i teorisë QCD në një hapësirë diskrete fut natyrshëm një impuls kufi ("cut off") të rendit $1/a$, ku a është parametri i rrjetës, e cila rregullon teorinë. Si rezultat, QCD-ja rrjetore është e përcaktuar matematikisht në mënyrë të saktë. Për më tepër, duke qënë e përshtatshme në regjime të energjive të ulta, ajo përdoret për studimin e fenomeneve mjaft të rëndësishme që shfaqen në këto regjime, siç është mbyllësia e

kuarkeve apo dukuri të tjera të fizikës bërthamore.

Në QCD-në rrjetore, në nyjet e rrjetës vendosen fushat e kuarkeve ose fushat fermionike dhe në lidhjet midis nyjeve fushat e gluoneve, ose fushat kalibruese. Për të studjuar bashkëveprimet midis kuarkeve duhen llogaritur përhapësit e kuarkeve që matematikisht janë të anasjelltët e operatorit të Dirac-ut. Ndërkohë që insistohet të ndërtohet në rrjetë një teori fermionike *kirale* pasi simetria kirale është karakteristikë e bashkëveprimeve të forta. Kështu, në këtë artikull do të llogarisim përhapësit e kuarkeve kirale në rrjetë me anë të një operatori kiral të Dirac-ut, siç është operatori i mbulimit i Neuberger-it. Meqënëse ky operator lidh dy nënhapësira me anë funksionesh transhendente operatoriale, siç do të trajtohet në vazhdimësi, edhe metodat llogaritëse kanë kompleksitet të lartë. Në këtë artikull ne sjellim një metodë llogaritëse më të shpejtë se ato standarte, e quajtur metoda e algoritmit me dy rrjeta, e cila e përshpejton zgjidhjen në sajë të përafrimit më efikas që i bëhet gjëndjeve vehtjake të ulëta të operatorit të Dirac-ut [11]. Ky algoritëm është propozuar një dekadë më parë po është testuar vetëm për një konstante të vetme të çiftimit [1]. Në këtë punim ai do të studjohet për një bashkësi vlerash konstantesh çiftimi të fushës kalibruese. Qëllimi është ndërtimi dhe testimi i algoritmit me dy rrjeta për vlera të ndryshme të konstantes së çiftimit të fushave kalibruese dhe për masa kuarkesh edhe më të lehta se në referencën [1]. Algoritmi do të krahasohet me një algoritëm standart, që përdoret shpesh në QCD-në rrjetore si një nga metodat më të shpejta për të llogaritur përhapësit e kuarkeve në rrjetë, algoritmin e Gradienteve të Konjuguar për barazimet normale ose në anglisht CGNE (Conjugate Gradients on Normal Equation) [7].

2. FERMIONE KIRALE ME ANË TË OPERATORIT TË NEUBERGER-IT

Në 1982, Ginsparg dhe Wilson arritën në përfundimin se në rrjetë mund të gjëndet një operator kiral i Dirac-ut në rrjetë që plotëson kushtin që u quajti relacioni Ginsparg-Wilson [6]:

$$\{D, \gamma_5\} = aD\gamma_5D \quad (1)$$

Vërejmë se në kufirin e vazhduar rikuperohet relacioni i zakonshëm për kiralitetin. Një operator kandidat që plotëson këtë relacion është operatori i mbulimit të Neuberger-it [10]:

$$D = c_1I - c_2V, \quad (2)$$

ku $V = A(A^+A)^{-1/2}$ është matricë unitare, I është matricë identitet dhe $A = M - aD_W$. Operatori i mbulimit D është jo-hermitian. Këtë operator mund ta shprehim edhe në mënyrë ekuivalente me anë të funksionit shenjë,

$$D = c_1I - c_2\gamma_5\text{sign}(H_W) \quad (3)$$

ku $H_W = \gamma_5(M - aD_W)$ $H_W = \gamma_5(M - aD_W)$, M është një parametër zhvendosës në intervalin (0,2), të cilin e kemi fiksuar $M=1.8$ në rastin e studimit tonë, c_1 dhe c_2 janë dy konstante që përcaktohen me anë të barazimeve,

$$c_1 = \frac{1+m_q}{2}, \quad c_2 = \frac{1-m_q}{2}$$

m_q është masa e kuarkeve dhe D_W është operatori i Wilson-Dirac-ut,

$$D_W = \frac{1}{2} \sum_{\mu} [\gamma_{\mu}(\partial_{\mu}^* + \partial_{\mu}) - a\partial_{\mu}^* \partial_{\mu}] \quad (4)$$

dhe ∂_{μ} , ∂_{μ}^* janë operatorët e diferencave të përparme dhe të prapme, fqinjë më të afërt:

$$\partial_{\mu} f(x) = \frac{1}{a}(f(x + ae_{\mu}) - f(x)),$$

$$\partial_{\mu}^* f(x) = \frac{1}{a}(f(x) - f(x - ae_{\mu})), \quad (5)$$

ku e_{μ} janë ortet drejtuese sipas drejtimit μ . γ_{μ} janë matrica 4×4 që i binden algjebërës së Clifford – Dirac-ut. Kështu, n.q.se rrjeta ka N nyje, meqë

fushat kalibruese marrin vlera në grupin SU(3), atëherë matrica e Dirac-ut në rrjetë është e rendit 12N. Përparësitë e fermioneve kirale të Neuberger-it janë: a) simetria kirale e QCD-së rrjetore është ekzakte pasi veprimi i fermioneve është invariant ndaj transformimeve kirale [8], vërejmë se relacioni i antikomutimit (1), kur kalojmë në QCD e vazhduar, pra për $a \rightarrow 0$, jep kushtin e simetrisë kirale ashtu siç duhet të jetë në hapësirë-kohën e vazhduar; b) kemi teori fermionike pa dublantë, fermionet përcaktohen në mënyrë të vetme. Problemet që hasen në këtë metodë studimi lidhen me kompleksitetin e lartë llogaritës, për shkak të formës së komplikuar, si funksion matricor, të operatorit të Neuberger-it.

3 FERMIONET E SHKURTUARA TË MBULIMIT

Fermionet e mbulimit të Neuberger-it janë të njëvlefshme me fermionet e shkurtuara të mbulimit, në një formulim 5-përmasor, me përmasë të pestë Euklidiane N_5 [3]. Nëpërmjet këtij ekuivalentimi bëhet e mundur përshtatja dhe përdorimi i rrjetave të shumëfishta sipas përmasës së pestë. Ideja bazë është ndarja në hapësirë sipas një dimensionit shtesë e kiraliteteve të majta dhe të djathta të përcaktuara në dy anët e kundërta të kufirit ose *murit domenor*. Përgjatë dimensionit të pestë nuk kemi fusha kalibruese. Operatori i Dirac-ut tani jepet si matricë me $N_5 \times N_5$ blloqe operatore në 4-përmasa:

$$M_{TOV}(m_q) = \begin{pmatrix} a_5D_W - I & (a_5D_W + I)P_+ & & -m_q(a_5D_W + I)P_- \\ (a_5D_W + I)P_- & a_5D_W - I & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & (a_5D_W + I)P_+ \\ -m_q(a_5D_W + I)P_+ & & (a_5D_W + I)P_- & a_5D_W - I \end{pmatrix} \quad (6)$$

ku a_5 është parametri i rrjetës sipas dimensionit të 5-të dhe P_{\pm} janë operatorët e projekcionit të kiraliteteve të dhëna nga:

$$P_{\pm} = \frac{I_4 \pm \gamma_5}{2}$$

Fermionet e të tilla quhen fermione të mureve domenore ose “domain wall fermions (DWF)” [12]. Natyrshëm lind pyetja: “A janë fermionet e mureve domenore në njëfarë mënyre të lidhura me fermionet e mbulimit?”. Për t’i dhënë përgjigje kësaj pyetje duhet të ndërtohet teoria efektive në katër përmasa. Për këtë gjejmë formën e operatorit efektiv të Dirac-ut, D^{N_5} , në katër përmasa [3], nga ku del:

$$D^{(N_5)} = \frac{1+m_q}{2} I - \frac{1-m_q}{2} \gamma_5 \tanh \left(\frac{N_5}{2} \log \left(\frac{1-a_5 H_W}{1+a_5 H_W} \right) \right), \quad (7)$$

ku $H_W = \gamma_5(M - aD_W)$. Në kufirin $N_5 \rightarrow \infty$ marrim operatorin:

$$D^{(\infty)} = \frac{1+m_q}{2} I - \frac{1-m_q}{2} \gamma_5 \text{sign}(H_W). \quad (8)$$

4 ALGORITMI ME DY RRJETA PËR INVERTIMIN E OPERATORIT TË NEUBERGER-IT.

Një mënyrë efikase e zgjidhjes së sistemeve lineare që burojnë prej barazimeve diferenciale në rrjetë, është ajo e përdorimit të Rrjetave të Shumëfishta [11]. Në këtë punim do të zbatojmë algoritmin me dy rrjeta sipas përmasës së pestë në rastin e fermioneve të shkurtuara të mbulimit. Problemi që duam të zgjidhim është sistemi linear:

$$Dx = b, \quad (9)$$

ku D është operatori i mbulimit ose operatori i Neuberger-it, b ana e djathtë e barazimit ose burimi i kuarkeve dhe x janë përhapësit e kuarkeve. Në mënyrë që të përdorim algoritmin me dy rrjeta shfrytëzojmë njëvlefshmërinë e operatorit të mbulimit me atë të fermioneve të shkurtuara të mbulimit. Kështu sistemi i rrjetës së rrallë:

$$D^{(N_5)}y = r, \quad (10)$$

mund të merret prej zgjidhjes së sistemit 5-përmasor:

$$M_{TOV}(m_q)P\chi = M_{TOV}(1)P\eta, \quad (11)$$

me P shënojmë matricën e përkëmbimit:

$$P = \begin{pmatrix} P_+ & P_- & & & \\ & P_+ & \ddots & & \\ & & \ddots & P_- & \\ & & & \ddots & P_+ \\ P_- & & & & P_+ \end{pmatrix}$$

ku nga vektorët χ dhe η ,

$$\chi = (y, \chi^{(2)}, \dots, \chi^{(N_5)})^T \text{ dhe } \eta = (r, 0, \dots, 0)^T,$$

përcaktohen pikërisht vektorët y dhe r të sistemit të rrjetës së rrallë.

Më poshtë po japim algoritmin me dy rrjeta që kemi ndërtuar për zgjidhjen e këtij problemi:

Le të jenë $x_1 \in C^N$ dhe $r_1 = b - Dx_1$.

Caktojme dy toleranca: tol për sistemin në rrjetën e dendur dhe $tol0$ për sistemin në rrjetën e rrallë.

for $i=1,2, \dots$ **do**

Formojmë vektorin e rrjetës së rrallë

$\eta_i = (r_i, 0, \dots, 0)^T$, ku numri i vektorëve zero 4-

përmasore është $N_5 - 1$.

Zgjidhim sistemin linear

$M_{TOV}(m_q)P\chi_{i+1} = M_{TOV}(1)P\eta_i$ derisa mbetja të jetë më

e vogël se $tol0 \|M_{TOV}(1)P\eta_i\|_2$.

Nxjerrim korigjimin e zgjidhjes së përafërt 4-përmasore y_{i+1} prej asaj 5-përmasore

$$\chi_{i+1} = (y_{i+1}, \chi_{i+1}^{(2)}, \dots, \chi_{i+1}^{(N_5)})^T.$$

Përditësojmë zgjidhjen në rrjetën 4-përmasore

$$x_{i+1} = x_i + y_{i+1}$$

Llogarisim mbetjen e rrjetës së rrallë

$$r_{i+1} = b - Dx_{i+1}.$$

Ndalo nëse $\|r_{i+1}\|_2 < tol \|b\|_2$.

end for

Algoritmin e mësipërm e kemi koduar në Matlab/Octave. Siç pritet, për shkak të formës komplekse të operatorit të Neuberg-it, llogaritjet kompjuterike kërkojnë mjaft kohë fizike. Kështu një invertim me algoritmin CGNE kërkon rreth 60 minuta në procesorin Intel (R) Core (TM)2 Duo CPU T5470@1.60GHz. Kjo është arsyeja që ne iu kthëm programeve në FORTRAN të cilat kërkojnë rreth 20 minuta në të njëjtin procesor.

5. REZULTATE DHE DISKUTIME

Përveç algoritmit të mësipërm të koduar në Matlab/Octave, janë shfrytëzuar disa funksione të gatshëm të paketës QCDLAB [4], një ndër ta është dhe algoritmi CGNE (Conjugate Gradients on Normal Equation). Qëllimi i përdorimit të tij është ai i krahasimit me algoritmin me dy rrjeta. Të dy algoritmet janë llogaritur në fushë kalibruese të fiksuar, në rrjetë me volum 4^4 , me konstante çiftimi të fushës kalibruese $\beta = 6/g^2$

$\beta = \frac{6}{g^2}$ nga $\beta = 5.8$ deri në $\beta = 5.5$, me hap 0.1.

Masa e kuarkut	Numri i shumëzimeve me matricën e Wilson-it	Norma e mbetjes
0.1	9552	10^{-5}
0.09	16152	$<10^{-8}$
0.08	12450	10^{-6}
0.07	20700	$<10^{-8}$
0.06	24366	$<10^{-8}$
0.05	17898	10^{-5}
0.04	26148	10^{-6}
0.03	47580	$<10^{-8}$

Tabela 1. Të dhënat e marra nga historia e konvergencës së algoritmit TWO - GRID për konfiguracionin e parë me konstante çiftimi $\beta=5.8$.

Për një vlerë të fiksuar të këtij parametri kemi testuar algoritmin me dy rrjeta për masa të ndryshme kuarkesh, duke filluar nga kuarke të rënda me masë (në njësi të konstantes së rrjetës, pra bëhet fjalë për a , e cila do të nënkuptohet) 0.13 deri në kuarke më të lehta me masë 0.03

me hap 0.01. U vu re se për secilën vlerë të fiksuar të konstantes së çiftimit, masat e kuarkeve për të cilin algoritmi me dy rrjeta funksionon ndryshonin nga njëri konfiguracion tek tjetri.

Rezultatet i kemi përmbledhur në tabelat vijuese për çdo konfiguracion, ku jepet një tablo e qartë për masa të ndryshme të kuarkeve, numri i shumëzimeve me matricën e Wilson-it dhe norma e mbetjes në këtë hap.

Masa e kuarkut	Numri i shumëzimeve me matricën e Wilson-it	Norma e mbetjes
0.13	8052	10^{-5}
0.12	13362	$<10^{-8}$
0.11	9606	10^{-5}
0.1	10956	10^{-5}
0.09	19566	$<10^{-8}$
0.08	15306	10^{-5}
0.07	17292	10^{-5}
0.06	24240	10^{-5}
0.05	24240	10^{-5}

Tabela 2. Të dhënat e marra nga historia e konvergencës së algoritmit TWO - GRID për konfiguracionin e dytë me konstante çiftimi $\beta=5.7$

Masa e kuarkut	Numri i shumëzimeve me matricën e Wilson-it	Norma e mbetjes
0.13	7512	10^{-5}
0.12	12108	$<10^{-8}$
0.11	13098	$<10^{-8}$
0.1	8958	10^{-5}
0.09	10080	10^{-5}
0.08	11286	10^{-5}
0.07	18282	$<10^{-8}$
0.06	20076	$<10^{-8}$
0.05	15612	10^{-5}

Tabela 3. Të dhënat e marra nga historia e konvergencës së algoritmit TWO - GRID për konfiguracionin e dytë me konstante çiftimi $\beta=5.6$

Masa e kuarkut	Numri i shumëzimeve me matricën e Wilson-it	Norma e mbetjes
0.13	11430	$<10^{-8}$
0.12	7674	10^{-5}
0.11	12948	$<10^{-8}$
0.1	14118	$<10^{-8}$
0.09	15312	$<10^{-8}$
0.08	17400	$<10^{-8}$
0.07	12378	10^{-5}
0.06	14670	10^{-5}
0.05	25452	$<10^{-8}$

Tabela 4. Të dhënat e marra nga historia e konvergjencës së algoritmit TWO - GRID për konfiguracionin e dytë me konstante çiftimi $\beta=5.5$

Në llogaritjet tona kemi përcaktuar saktësinë të rendit 10^{-8} . Vlerat e normës së mbetjes me shënjën më e vogël (<) nënkuptojnë se për masën korresponduese algoritmi me dy rrjeta rrit saktësinë e kërkuar prej nesh. Ndërsa masat e kuarkeve me normë mbetjesh pa shenjën <, kanë

një stanjacion të vlerave të mbetjeve në vlerën e kuotuar në tabelë. Ne do të konsiderojmë se algoritmi me dy rrjeta nuk konvergjon për këto masa. Konkretisht, për konfiguracionin e parë të marrë për $\beta = 5.8$, duke iu referuar të dhënave në Tabelën 1, shihet se algoritmi ynë konvergjon për masa të kuarkeve $m = 0.09$, $m = 0.07$, $m = 0.06$, $m = 0.03$, për masa të tjera kemi stanjacion.

Në konfiguracionin e dytë të marrë për $\beta = 5.7$, duke iu referuar të dhënave në Tabelën 2, algoritmi me dy rrjeta konvergjon për masa të kuarkeve $m = 0.12$, $m = 0.09$, për masa të tjera kemi stanjacion. Në konfiguracionin e tretë të marrë për $\beta = 5.6$, duke iu referuar të dhënave në Tabelën 3, algoritmi me dy rrjeta konvergjon për masa të kuarkeve $m = 0.12$, $m = 0.11$, $m = 0.07$, $m = 0.06$, për masa të tjera kemi stanjacion. Në konfiguracionin e katërt të marrë për $\beta = 5.5$, duke iu referuar të dhënave në Tabelën 3, algoritmi me dy rrjeta konvergjon për masa të kuarkeve $m = 0.13$, $m = 0.11$, $m = 0.1$, $m = 0.09$, $m = 0.08$, $m = 0.05$, për masa të tjera kemi stanjacion.

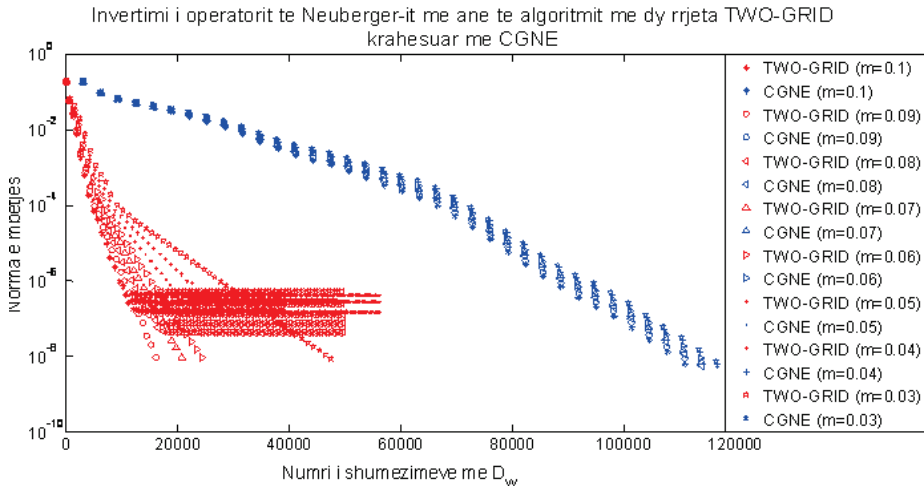


Figura 1 Grafiku që paraqet historinë e konvergjencës së algoritmit me dy rrjeta TWO-GRID dhe algoritmit CGNE për masa të ndryshme kuarkesh, të simuluar në një rrjetë me volum 4^4 dhe me konstante çiftimi $\beta = 5.8$.

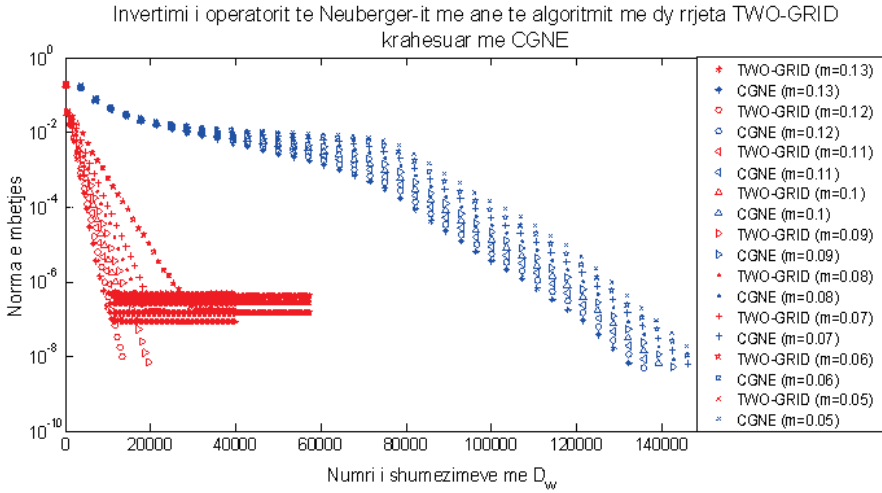


Figura 2 Grafiku që paraqet historinë e konvergencës së algoritmit me dy rrjeta TWO-GRID dhe algoritmit CGNE për masa të ndryshme kuarkesh, të simuluar në një rrjetë me volum 4^4 dhe me konstante çiftimi $\beta = 5.7$.

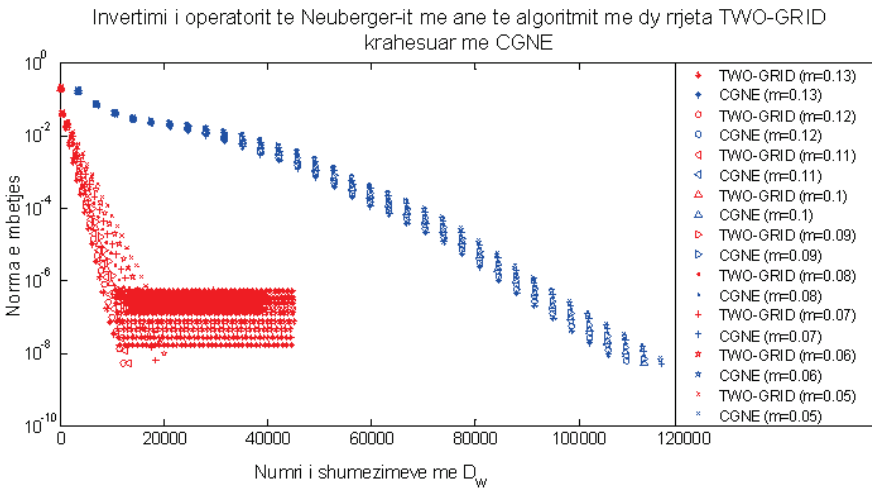


Figura 3 Grafiku që paraqet historinë e konvergencës së algoritmit me dy rrjeta TWO-GRID dhe algoritmit CGNE për masa të ndryshme kuarkesh, të simuluar në një rrjetë me volum 4^4 dhe me konstante çiftimi $\beta = 5.6$.

Paralelisht është kryer e njëjta procedurë edhe me algoritmin CGNE. Rezultatet e marra paraqiten në grafikët e mëposhtëm, ku jepet historia e konvergencës së algoritmit me dy rrjeta (TWO-GRID) dhe atij CGNE si funksion i numrit të shumzimeve që kryhen me matricën e Wilson-it. Figura 1 është marrë për konfiguracionin e parë të gjeneruar me konstante çiftimi $\beta = 5.8$ dhe masa kuarkesh të ndryshme siç tregohen në figurë. Po kështu Figura 2 jep

historinë e konvergencës së dy algoritmeve për konstante çiftimi $\beta = 5.7$, Figura 3 për konstante çiftimi $\beta = 5.6$ dhe Figura 4 për konstante çiftimi $\beta = 5.5$. Duket qartë se algoritmi me dy rrjeta për secilin konfiguracion është rreth 6-herë më i shpejtë se CGNE për ato masa kuarkesh për të cilat ai konvergjon. Këto rezultate paraprake tregojnë se algoritmi me dy rrjeta është shumë premtues. Përpara se të jepen konkluzione

përfundimtare, do të duhet së pari të gjejmë origjinën e moskonvergencës për masa të caktuara. Llogaritjet tona nuk tregojnë ndonjë rregullsi gjë që na bën të besojmë se kemi të

bëjmë me mungesë instabiliteti të algoritmit, instabilitet që duhet ta studiojmë në të ardhmen përpara se të avancojmë studimin në rrjeta ende më të mëdha.

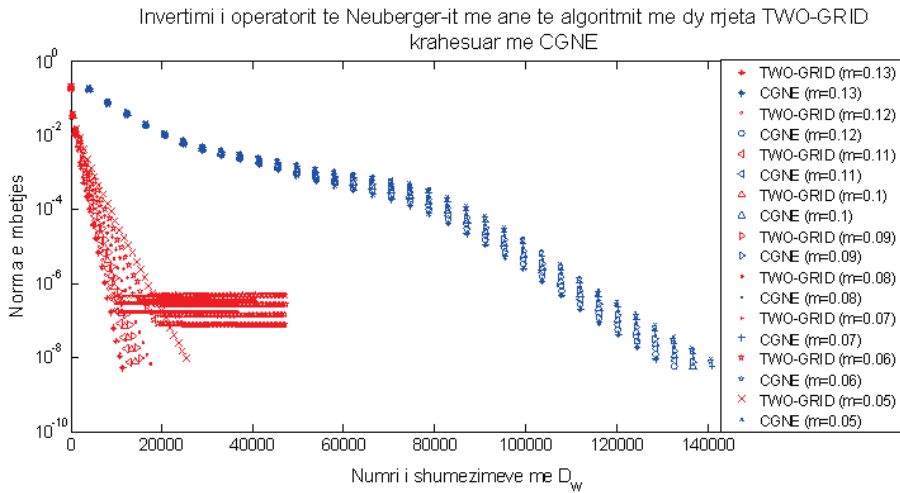


Figura 4 Grafiku që paraqet historinë e konvergencës së algoritmit me dy rrjeta TWO-GRID dhe algoritmit CGNE për masa të ndryshme kuarkesh, të simuluar në një rrjetë me volum 4^4 dhe me konstante çiftimi $\beta = 5.5$

BIBLIOGRAFIA

[1] Boriçi, A (2004) The two-grid algorithm confronts a shifted unitary orthogonal method, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 140 (2005) 850-852, arXiv:hep-lat/0409078v1.
 [2] Boriçi, A (2004). Computational methods for the fermion determinant and the link between overlap and domain wall fermions, in Boriçi et al (eds), QCD and Numerical Analysis III, Springer 2005, arXiv:hep-lat/0402035v1.
 [3] Boriçi, A (1999). Truncated Overlap Fermions: the link between Overlap and Domain Wall Fermions, in V. Mitrjushkin and G. Schierholz (eds.), Lattice Fermions and Structure of the Vacuum, Kluwer Academic Publishers, 2000, arXiv:hep-lat/9912040v1.
 [4] Boriçi, A (2006). QCDCALB: Designing Lattice QCD Algorithms with MATLAB, arXiv:hep-lat/0610054.
 [5] Cern Bulletin (2010). The latest from the LHC. Published in CERN Bulletin BUL-NA-2010-233.
 [6] Ginsparg PH, Wilson KG (1982). Phys.Rev. D 25, 2649.

[7] Hestenes MR, Stiefel E (1952). On the convergence of the conjugate gradient method for singular liner operator equations. J. Research Nat. Bur. Standards 49,409–436.
 [8] Lüscher M (1998). Exact chiral symmetry on the lattice and the Ginsparg-Wilson relation. Phys. Lett. B 428 342.
 [9] Metropolis N, Ulam S (1949). The Monte Carlo Method. American Statistical Association 44 (247), 335–341.
 [10] Neuberger H (1998). Phys.Lett.B 417, 141. Phys.Rev. D 57, 5417.
 [11] Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP (2007). Numerical Recipies. Third Edition. Cambrige University Press, New York.
 [12] Shamir Y (1998). Reducing Chiral Symmetry Violations in Lattice QCD with Domain Wall Fermions, Phys.Rev. D59 (1999) 054506, arXiv:hep-lat/9807012v1.