AKTET
Journal of Institute Alb-Shkenca
Revistë Shkencore e Institutit Alb-Shkenca

ISSN 2073-2244
www.alb-shkenca.org

INTEGRAL PRESENTATION OF A CONVEX FUNCTION
PARAQITJA INTEGRALE E FUNKSIONIT KONVEKS

LUIGJ GJOKA[a], QEFSERE GJONBALAJ[b]
[a] Departamenti i Inxhinierisë Matematike, Universiteti Politeknik, Tiranë, Shqipëri.
[b] Departamenti i Matematikës, Fakulteti i Inxhinierisë Elektrike dhe Kompjuterike, Universiteti i Prishtinës, Kosovë
Email: luigjgjoka@ymail.com

AKTET IV, 3: 397 - 401, 2011

PERMBLEDHJE
Në këtë artikull ne trajtojmë problemin e paraqitjes integrale të një funksioni konveks. Le të jetë $\mathbf{I}$ një interval në $\mathcal{R}$. Këtu, duke përdorur integralin e Rimanit ose të Lebegut, gjejmë kushtin e domosdoshëm dhe të mjaftueshëm që një funksion $f:\mathbf{I}\to\mathcal{R}$, të jetë konveks në $\mathbf{I}$. Për t'ia arritur këtij qëllimi, kemi shfrytëzuar tri veti të rëndësishme të funksioneve konvekse që kanë të bëjnë me vazhdueshmërinë dhe derivueshmërinë e tyre (pohimet (P_1), (P_2) dhe (P_3)). Për të treguar se derivati i një funksioni konveks është i integrueshëm sipa Rimanit, na u desh të vërtetonim lemën 2.
Fjalë kyçe: funksion konveks, integral i Rimanit / Lebegut

SUMMARY
In this article we address the problem of integral presentation of a convex function. Let $\mathbf{I}$ be an interval in $\mathcal{R}$. Here, using the Riemann or Lebesgue's integration theory, we find the necessary and sufficient condition for a function $f:\mathbf{I}\to\mathcal{R}$ to be convex in $\mathbf{I}$. In order to achieve this goal we have used three well-known facts about convex functions dealing with their continuity and differentiability (propositions (P_1) (P_2) and (P_3). To prove that the derivative of a convex function is Riemann integrable, was needed to prove lemma 2.
Key words: Convex function, Riemann/ Lebesgue integral

1. HYRJE

Për funksionet konvekse janë shkruar artikuj të shumtë. Këtu do të qëndrojmë vetëm tek aspekti i paraqitjes së tyre me anë të integralit të pacaktuar, sipas formulës (1). Ky problem shqyrtohet edhe në [1], por vetëm në rastin kur si operator integrimi merret ai i Rimanit. Këtu, përveçse e ritrajtojmë këtë problem në një trajtë më të thjeshtë, më të shkurtër dhe eksplicite në rastin kur si operator integrimi është ai i Rimanit, e përgjithësojmë atë edhe në rastin kur si operator integrimi është ai i Lebegut. Kjo gjë u bë e mundur për shkak të faktit që kemi përdorur kuptimin e funksionit konveks të përcaktuar me anë të barazimit (2), ndryshe nga [7] dhe [1], ku ky kuptim jepet me anë të barazimit 2.

2. PËRKUFIZIMI I FUNKSIONIT KONVEKS

Funksioni real $f:\mathbf{I}\to\mathcal{R}$ quhet "konveks" (nga sipër) në një interval në $\mathbf{I}$, në qoftë se

$$f\left(tx_1+(1-t)x_2\right)\le tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \quad (1)$$

për çdo dy pika $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$ dhe çdo $t\in[0,1]$.

Në qoftë se në mosbarazimin (1) zëvendësojmë $t=1/2$, përftohet mosbarazimi

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad (2)$$

për çdo dy pika $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$.

Anasjellas, nga vërtetësia e mosbarazimit (2) nuk rrjedh vërtetësia e mosbarazimit (1). Për këtë mjafton t'i referohemi [5], ku tregohet se për funksionin f, të përcaktuar nga formula

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{nëse } x \text{ është numër racional;} \\ 0, & \text{nëse } x \text{ është numër irracional.} \end{cases} \qquad (3)$$

është i vërtetë mosbarazimi (2), por jo (1).

Lemë 1. Në qoftë se funksioni f është i vazhdueshëm në intervalin $\mathbf{I}$ dhe plotëson mosbarazimin (3), atëherë ai plotëson edhe mosbarazimin (2), d.m.th. f është funksion konveks.
Një vërtetim interesant i këtij fakti gjendet në [6].

3. POHIME TË MIRËNJOHURA PËR FUNKSIONET KONVEKSE

Në qoftë se $f:\mathbf{I}\to\mathscr{R}$ është funksion konveks, atëherë funksioni f ka këto cilësi:

(P_1) E ekzistojnë derivatet e pjesshme $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$, të cilat janë të fundme në çdo pikë $x\in\mathbf{I}$. Funksionet f'_- dhe f'_+ janë monotone jozvogëluese në $\mathbf{I}$, ndërkohë derivati i djathtë është i vazhdueshëm nga e djathta, ndërsa derivati i majtë është i vazhdueshëm nga e majta (shih [2] ose [8]).

(P_2) Bashkësia e pikave ku funksioni f nuk është i derivueshëm është e numërueshme (shih [2] ose [8]).

(P_3) Në qoftë se $[a,b]\subset\mathbf{I}$ dhe $M=\max\{f'_+(a);f'_-(b)\}$, atëherë për çdo dy pika x dhe y nga $[a,b]$ është i vërtetë mosbarazimi

$$|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$$

që do të thotë se funksioni f plotëson kushtin e Lipshitzit (Lipschitz) [8].

Lemë 2. Në qoftë se funksioni $f:\mathbf{I}\to\mathscr{R}$ është konveks, atëherë derivati f' është i vazhdueshëm në $\mathbf{I}$, me përjashtim ndoshta të një bashkësie të numërueshme pikash të këtij intervali.

Vërtetim. Në saje të pohimit **(P_2)** derivati f' ekziston në $\mathbf{I}$, me përjashtim ndoshta të një bashkësie të numërueshme pikash $\mathbf{E}=\{x_1,x_2,\ldots\}$. Për $x\in\mathbf{I}\setminus\mathbf{E}$ është i vërtetë barazimi

$$f'_-(x)=f'_+(x)=f'(x)$$

Meqenëse funksioni f'_- është i vazhdueshëm nga e djathta dhe funksioni f'_+ është i vazhdueshëm nga e majta (pohimit $\mathbf{P_1}$), rrjedh se derivati f' është funksion i vazhdueshëm edhe nga e majta edhe nga e djathta në $\mathbf{I}\setminus\mathbf{E}$, që do të thotë se ai është i vazhdueshëm në $\mathbf{I}\setminus\mathbf{E}$.

4. PARAQITJA INTEGRALE E FUNKSIONIT KONVEKS

Le të jetë $f:\mathbf{I}\to\mathbf{R}$ i përcaktuar në një interval $\mathbf{I}$ dhe $a\in\mathbf{I}$ një pikë e fiksuar.

Teoremë 1. Kusht i domosdoshëm dhe i mjaftueshëm që funksioni f të jetë konveks në intervalin $\mathbf{I}$ është që për çdo $x\in\mathbf{I}$, ky funksion të paraqitet në trajtën

$$f(x)=C+(\mathscr{R})\int_a^x g(t)dt \qquad (4)$$

ku g është funksion jozvogëlues në $\mathbf{I}$ dhe C konstante reale (në fakt, $C=f(a)$).

(Simboli $(\mathscr{R})$ para shenjës së integralit tregon integrim sipas Rimanit, të cilin, gjatë vërtetimit, nuk do ta shkruajmë, por do ta nënkuptojmë.)

Vërtetim

►Të vërtetojmë që kushti (5) është i domosdoshëm. E zëmë se f është konveks në $\mathbf{I}$. Në bazë të lemës 2 bashkësia e pikave të këputjes të funksionit f' ka masën (sipas Lebegut) zero. Në teorinë e integralit të Rimanit (shih p.sh. [3]) provohet se:

- Derivati f' është i integrueshëm sipas Rimanit atëherë dhe vetëm atëherë kur bashkësia e pikave të këputjes së tij, e cila është e tipit F_σ, ta ketë masën sipas Lebegut të barabartë me zero.
- Çdo funksion $f:[a,b]\mapsto\mathbf{R}$ që e ka derivatin f' të integrueshëm sipas Rimanit në segmentin $[a,b]$, është integral i pacaktuar i derivatit të vet:

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt \qquad (a\le x\le b) \qquad (5)$$

Formula (6) është e vërtetë edhe kur $b<a$, d.m.th. është e vërtetë në një segment të përgjithësuar $[a,b]$. Meqenëse çdo pikë $x\in\mathbf{I}$ mund ta përfshijmë në një segment të përgjithësuar $[a,b]$, të tillë që $[a,b]\subset\mathbf{I}$, barazimi (6) është i vërtetë për çdo $x\in\mathbf{I}$.

Po të zëvendësojmë në këtë formulë derivatin $f'(t)$ me derivatin e djathtë $f'_+(t)$, formula (5) merr trajtën

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'_+(t)dt \qquad (x\in\mathbf{I}) \tag{6}$$

ose

$$f(x)=C+\int_a^x g(t)dt \quad (x\in\mathbf{I}) \tag{7}$$

ku, sipas pohimit (**P$_1$**), funksioni $g(t)=f'_+(t)$ është jozvogëlues, ndërkohë $C=f(a)$.

►**Të vërtetojmë që kushti (5) është i mjaftueshëm.** E zëmë se për funksionin f është i vërtetë barazimi (5). Meqenëse integrali i pacaktuar $(\mathscr{R})\int_{x_0}^x g(t)dt$ është funksion uniformisht i vazhdueshëm, rrjedh se funksioni f është i vazhdueshëm. Pjesa tjetër e vërtetimit vazhdon njëlloj si në vërtetimin e kushtit të mjaftueshëm në teoremën 2 .

Teoremë 2. Kusht i domosdoshëm dhe i mjaftueshëm që funksioni f të jetë konveks në intervalin $\mathbf{I}$, është që për çdo $x\in\mathbf{I}$, ky funksion të paraqitet në trajtën

$$f(x)=C+(\mathscr{L})\int_a^x g(t)dt\,, \tag{8}$$

ku g është funksion jozvogëlues në $[a,b]$ dhe C një konstante reale (në fakt, $C=f(a)$).

(Simboli $(\mathscr{L})$ para shenjës së integralit tregon integrim sipas Lebegut, të cilin, gjatë vërtetimit, nuk do ta shkruajmë, por do ta nënkuptojmë.)

Vërtetim

► **Të vërtetojmë që kushti (9) është i domosdoshëm.** E zëmë se f është konveks në intervalin $\mathbf{I}$, Nga pohimi (P$_3$) rrjedh se funksioni f është absolutisht i vazhdueshëm në çdo segment $[a,b]\subset\mathbf{I}$. Le të jetë $x\in\mathbf{I}$, atëherë ekziston segmenti $[a,b]$, i tillë që $x\in[a,b]\subset\mathbf{I}$. Në bazë të teoremës së Lebegut (shih [4], faqe 345), funksioni f mund të shprehet si integral i pacaktuar (sipas Lebegut) i derivatit të tij në trajtën

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt \tag{9}$$

Po të zëvendësojmë në këtë formulë derivatin $f'(t)$ me derivatin e djathtë $f'_+(t)$, formula (9) merr trajtën

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'_+(t)dt \tag{10}$$

ose

$$f(x)=C+\int_a^x g(t)dt \tag{11}$$

ku, sipas pohimit (P$_2$), funksioni $g(t)=f'_+(t)$ është funksion jozvogëlues, ndërsa $C=f(a)$.

►**Të vërtetojmë që kushti (9) është i mjaftueshëm.** E zëmë se për funksionin f është i vërtetë barazimi (9). Meqenëse integrali i pacaktuar $(\mathscr{L})\int_{x_0}^x g(t)dt$ është funksion absolutisht i vazhdueshëm (shih [4], faqe 344) rrjedh se funksioni f është i vazhdueshëm. Për të vërtetuar që funksioni f është konveks, mjafton të provojmë që ai plotëson mosbarazimin (3), pra të provojmë që plotëson kushtet e lemës. Për këtë, nisemi nga ana e majtë e mosbarazimit (3):

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\int_a^{\frac{x_1+x_2}{2}} g(t)dt=$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\int_a^{x_1} g(t)dt+\int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} g(t)dt\right)+\left(\int_a^{x_2} g(t)dt-\int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} g(t)dt\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\int_a^{x_1} g(t)dt+\int_{x_1}^{x_2} g(t)dt\right)+\left(\int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} g(t)dt-\int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} g(t)dt\right)\right]$$

Meqenëse funksioni g është jozvogëlues, atëherë mund të shkruajmë:

$$\left(\int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} g(t)dt-\int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} g(t)dt\right)\le g(\frac{x_1+x_2}{2})\frac{x_2-x_1}{2}-g(\frac{x_1+x_2}{2})\frac{x_2-x_1}{2}=0$$

Që këtej rrjedh se

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left(\int_a^{x_1} g(t)dt+\int_a^{x_2} g(t)dt\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

çka provon se funksioni f është konveks në $[a,b]$.

Teoremë 3. Fiksojmë një pikë $a\in\mathbf{I}$. Me anën e operatorëve të Rimanit ose Lebegut mund të vendoset një korrespondencë biunivoke (një për një) midis bashkësisë $\phi=\{\varphi\}$ të funksioneve jozvogëluese në një interval $\mathbf{I}\subset\mathscr{R}$ dhe bashkësisë $F=\{f\}$ të funksioneve konvekse nga sipër në $\mathbf{I}$, për të cilët $f(a)=0$, sipas formulës

$$f(x)=\int_a^x \varphi(t)dt \qquad (x\in\mathbf{I}). \qquad (12)$$

Vërtetim.

♦ Le të jetë $\varphi\in\phi$. Meqenëse φ është funksion jozvogëlues në intervalin $\mathbf{I}$, atëherë ai është integrueshëm sipas Lebegut pra, edhe sipas Rimanit. Ndërtojmë funksionin $f(x)=\int_a^x \varphi(t)dt$, ku $\int_a^x$ është operator integrimi i Rimanit ose i Lebegut. Nga arsyetimet që bëmë në teoremat 1 dhe 2 rrjedh se funksioni f është konveks në intervalin $\mathbf{I}$, pra $f\in F$.

♦ Le të jetë $f\in F$. Sipas arsyetimeve në teoremat 1 dhe 2 mund të shkruajmë barazimin

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'_+(t)dt=\int_a^x \varphi(t)dt \qquad (x\in\mathbf{I}),$$

ku $\varphi=f'_+$ është funksion monoton jozvogëlues në $\mathbf{I}$. Kështu, funksionit $f\in F$ i përgjigjet funksioni $\varphi=f'_+\in\phi$.

♦ Le të jetë $\varphi\in\phi$. Meqenëse φ është funksion jozvogëlues në intervalin $\mathbf{I}$, atëherë ai është integrueshëm sipas Lebegut pra, edhe sipas Rimanit. Ndërtojmë funksionin $f(x)=\int_a^x \varphi(t)dt$, ku $\int_a^x$ është operator integrimi i Rimanit ose i Lebegut. Nga arsyetimet që bëmë në teoremat 1 dhe 2 rrjedh se funksioni f është konveks në intervalin $\mathbf{I}$.

Vendosëm në këtë mënyrë një korrespondencë ndërmjet bashkësive. Mbetet të provojmë që kjo korrespondencë është biunivoke (një për një).

♦ Le të jenë f_1 e f_2 dy funksione të ndryshme nga ϕ, d. m. th. $f_1\ne f_2$. Shënojmë me $\varphi_1={f_1'}_+$ e $\varphi_2={f_2'}_+$. Të vërtetojmë që $\varphi_1\ne\varphi_2$. Në kundërt do të kishim $\varphi_1=\varphi_2$, d. m. th. ${f_1'}_+={f_2'}_+$. Në [9] vërtetohet se në qoftë se derivati i djathtë i një funksioni të vazhdueshëm është zero në një interval, atëherë ky funksion është konstant në atë interval. Kështu, në rastin tonë, meqenëse f_1-f_2 është i vazhdueshëm dhe $(f_1-f_2)'_+=0$ në intervalin $\mathbf{I}$, rrjedh se $f_1-f_2=c\,(\text{konst.})$ në $\mathbf{I}$. Ndërkohë, meqenëse kemi $f_1(a)-f_2(a)=0$, rrjedh se $f_1-f_2=0$, d. m. th $f_1=f_2$, gjë që bie në kundërshtim me supozimin.

BIBLIOGRAFIA

[1] Álvarez H, (2007) On the characterization of convex functions, Rev. Unión Mat. Argent. v.48 n.1 Bahía Blanca ene. jun.

[2] Dahl G , (2009) An Introduction to Convexity , Oslo (Norway)

[3] Fundo M, (1984) Një vërejtje për problemin e primitivës në integrimin e Rimanit, Rev. B.SH.N, Tiranë

[4] Kolmogorov A. N; S. V. Fomin, (1981) Elements of the Theory of Functions and

Functional Analysis (In Russian language) "Nauka", Moscow
[5] Gjoka L, (1985) Veti të funksioneve gjysmë të derivueshme, Rev. B.SH.N, Tiranë
[6] Sorozina É, (1999) Système D Analise, Dunod , Paris,
[7] Natanson, I. P. Theory of functions of a real variable. Vol. II. Translated from the Russian by Leo F. Boron Frederick Ungar Publishing Co., New York 1961 265 p.
[8] Constantin P. Niculescu, Lars-Erik Persson, (2004) Convex functions and their applications- Monograf- Springer
[9] William J. Knight, (1980) Functions with zero right derivatives are constant, Monthly (657-658).