AKTET
Journal of Institute Alb-Shkenca
Revistë Shkencore e Institutit Alb-Shkenca

ISSN 2073-2244
www.alb-shkenca.org

REGULAR INVERSE Γ-SEMIGROUP
Γ-GJYSMËGRUPE TË RREGULLT INVERSIV.

ISLAM BRAJA[a], EDMOND PISHA[b]
[a] Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, University "Aleksander Xhuvani", Elbasan, Albania.
[b] Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, University of Tirana, Albania.
Email address: braja_islam@yahoo.com

AKTET IV, 3: 402 - 406, 2011

PERMBLEDHJE
Në këtë punim janë paraqitur disa rezultate e arritura në Γ-gjysmëgrupet inversiv. Në këtë artikull janë dhënë përkufizimet e Γ-gjysmëgrupit, elementit të rregullt, elementit invers, Γ-gjysmëgrupit të rregullt, duke përfshin disa argumente rreth tyre. Rezultati kryesor eshte teorema mbi ekuivalencën e tre kushteve të një Γ-gjysmëgrupi, ku kushti që, çdo Γ-gjysmëgrupit M është i rregullt dhe për çdo dy idempotentë të tij *e* dhe *f* kemi *eγf=fγe*, γ ∈ Γ, është ekuivalent me kushtin që ideali kryesor i djathtë dhe çdo ideal kryesor i majtë i *M* ka një gjenerator idempotent unik, si edhe me kushtin që çdo element i *M* ka një gjenerator inversiv unik në *M*. Theksohet se *H* është një H-klasë, së cilës i takon elementi idempotent *e=exe*.
Fjale kyce: Γ-gjysmëgrup inversiv , element inversiv i rregullt

SUMMARY
In this paper are presented some achieved results on inversiv Γ-semigroups. In these papers are given the definitions of Γ-semigroup, regular element, invers element, regular Γ-semigroup, involving several proofs about them. The main result is the theorem on the equivalnce of three conditions of a Γ-semigroup, where the condition that, any Γ-semigroup *M* is regular and for every two of its idempotents e and f have *eγf=fγe*,γ∈ Γ , is equivalent with the condition that right principal ideal and every left principal ideal of *M* has a unique idempotent generator, also with the condition that every element of *M* has a unique inverse generator in *M*. Emphasize that *H* is an H–class where the idempotent element *e=exe* belongs to.
Key words: Inversive Γ-semigroup, Regular inversive element

1. HYRJE

Përkufizim 1.1 [8] Le të jetë *M*={*a*, *b*, *c*, ..., } dhe Γ={*x*, *y*, *z*, ..., } dy bashkësi jo boshe. *M* quhet Γ-gjysmëgrup në qoftë se :

1. $axb \in M$,
2. $(axb)yc=ax(byc)$ për $a, b, c \in M$, $x, y \in \Gamma$.

Në përkufizim i ashtuquajturi shumëzim, që ngjason me shumëzimin e gjysmëgrupit të zakonshëm është përshkruar në trajtë intuitave, prandaj po e saktësojmë atë.

Le të jenë *M*={*a*, *b*, *c*, ..., }, Γ={*x*, *y*, *z*, ...,} dy bashkësi joboshe. Shumëzim në bashkësinë *M* nëpërmjet elementeve të bashkësisë Γ, të cilët janë në mes, do të quajmë çdo pasqyrim të $M\times\Gamma\times M$ në *M*. Këtë shumëzim do ta quajmë edhe Γ-shumëzim në *M* dhe e shënojmë $(\cdot)_\Gamma$. Rezultatin e Γ-shumëzimit në *M* për çdo dy elemente *a*, *b* të *M* dhe çdo element $x \in \Gamma$, që nuk është gjë tjetër veçse shëmbëllimi i pasqyrimit $(\cdot)_\Gamma$ për treshen (a, x, b), $(\cdot)_\Gamma(a, x,b)$, do ta shënojmë thjesht *axb*.

Tani përkufizimin 1 mund t'a jepnim në një trajtë më të modernizuar:

Γ-gjysmëgrup quhet çdo çift i radhitur (*M*, $(\cdot)_\Gamma$), ku *M* është një bashkësi joboshe, $(\cdot)_\Gamma$ është një shumëzim në *M* nëpërmjet elementeve të Γ për të cilin

$$\forall\ (a, b, c, x, y) \in M^3\times\Gamma^2,\ (axb)yc=ax(byc).$$

Përkufizim 1.2. [8] Le të jetë (M, $(\cdot)_\Gamma$) një Γ-gjysmëgrup. Nënbashkësia joboshe M_1 e bashkësisë M quhet Γ-nëngjysm

Përkufizim 1.3. [8] Nënbashkësia jo boshe L (R) e M quhet ideal i majtë (i djathtë) në qoftë se M ΓL $\subseteq$ L (R ΓM $\subseteq$ R) .

Përkufizim 1.4. [8] Nënbashkësia joboshe I e M quhet ideal i dyanshëm ose thjesht ideal në qoftë se është njëkohë

Përkufizim 1.5. [7] Çdo ideal i djathtë (ideal i majtë, ideal) i Γ-gjysmëgrupit M i cili është i ndryshëm nga M quhet i

MATERIALI DHE METODA

Tani, në një Γ-gjysmëgrup M mund të përcaktohen relacionet analoge me relacionet e Green-it në një gjysmëgrup [4].

Le të jetë M një Γ-gjysmëgrup dhe a, b nga M. Përcaktojmë relacionet binare si më poshtë:

(1) a L b $\Leftrightarrow$ $(a)_l=(b)_l$.

(2) a R b $\Leftrightarrow$ $(a)_r=(b)_r$.

(3) a J b $\Leftrightarrow$ (a)=(b).

(4) a H b $\Leftrightarrow$ a L b $\wedge$ a R b

(5) a D b $\Leftrightarrow$ $\exists$ c $\in$ M, a L c $\wedge$ c R b.

Shënojmë se L, R, H, J janë relacione ekuivalence në M. Klasat e ekuivalencës të elementit a të Γ-gjysmëgrupit M sipas këtyre relacioneve të ekuivalencës i shënojmë përkatësisht:

$$L_a,\ R_a,\ H_a,\ J_a.$$

Teoremë 1.6. (Teorema e Green-it).[1]. Në qoftë se H është një H–klasë e një Γ-gjysmëgrupi M, atëherë ose për çdo x nga Γ, HxH ∩ H=Φ ose H është një nëngrup i M_x.

Përkufizim 1.7. [4] Një element e $\in$ M quhet idempotent në një Γ-gjysmëgrup M në qoftë se ekziston një x $\in$ Γ i tillë që exe=e.

2. Γ-gjysmëgrupe të rregullt inversiv.

N. K. Saha më 1987 [6] ka dhënë këtë përkufizim:

Përkufizim. 2.1. [6] Le të jetë M një Γ-gjysmëgrup dhe a $\in$ M. Le të jenë gjithashtu b $\in$ M dhe x, y $\in$ Γ. Elementi b është një (x, y)-invers i a në qoftë se

$$a=(axb)ya\ \wedge\ b=(bya)xb.$$

Në këtë rast do të shkruajmë

$$b \in V_x^y(a).$$

Nga përkufizimi duket qartë se elementet a dhe b janë të rregullt.

Teoremë 2.2. Elementi a i Γ-gjysmëgrupit M është i rregullt atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston të paktën një b $\in V_x^y(a)$.

Vërtetim. Në qoftë se b $\in V_x^y(a)$, është e qartë se a është i rregullt.

Anasjellas, në qoftë se a është i rregullt i M dhe a=(axm)ya, atëherë elementi b=(mya)xm ka vetinë:

$$(axb)ya=(ax((mya)xm))ya=((ax(mya))xm)ya=(((axm)ya)xm)ya=(axm)ya=a$$

dhe

$$(bya)xb=(((mya)xm)ya)xb =(my((axm)ya))xb=(mya)xb= =(mya)x((mya)xm)= my(ax((mya)xm))=my(((axm)ya)xm)= =my(axm)=(mya)xm=b.$$

Këto veti tregojnë se

b $\in V_x^y(a)$. ■

Teoremë 2.3. Le të jetë M një Γ-gjysmëgrupit i rregullt. Le të jetë a=(axb)ya,

b $\in$ M dhe x, y $\in$ Γ të tillë që b $\in V_x^y(a)$,

atëherë kemi:

(1) axb dhe bya janë idempotentë;

(2) a D b.

Vërtetim. (1) Mund të shkruajmë:

$$(axb)y(axb)=((axb)ya)xb=axb,$$

pra, axb është idempotent.

Po kështu, tregohet se (bya)x(bya)=bya.

(2) Meqenë qoftë se axb është idempotent, për idealin e djathtë kryesor të përftuar nga axb, kemi:

$$(axb)_r=axb \cup (axb)\Gamma M=(axb)\Gamma M.$$

Gjithashtu, meqenë qoftë se a=(axb)ya, gjejmë se $(a)_r$=aΓM. Tani është e qartë se (axb)ΓM=aΓM, që tregon se a R axb.

Njëlloj tregohet se axb L b. Duke ditur

$$D=R \circ L=L \circ R$$

arrijmë në përfundimin se a D b.

Teoremë 2.4.[6]Le të jetë M një Γ-gjysmëgrupit i rregullt dhe a $\in$ M. Supozojmë se e=exe dhe f=fyf, për x, y $\in$ Γ janë dy idempotentë të tillë që e R a L f, atëherë ekziston një b $\in V_x^y(a)$, i vetëm i tillë që ayb=e dhe bxa=f.

Teoremë 2.5. Le të jetë M një Γ-gjysmëgrupit i rregullt dhe a=(axb)ya një element i tij. Atëherë H^x dhe H^y janë Γ-nëngrupe të M.

Vërtetim. Nga teorema 2.3. elementet a=axb dhe f=bya janë përkatësisht y dhe x,y-idempotentë. Le të jetë H, H-klasa në të cilën bën pjesë idempotenti e=eye. Nga ku del se H-klasa H është Γ-nëngrup H^y.

Po kështu, po të jetë H, H-klasa që përmban idempotentin f=bya, atëherë H^x është Γ-gjysmëgrup.

Teoremë 2.6.[6] Le të jetë M një Γ-gjysmëgrupit dhe a $\in$ M. Shënojmë me D_a, D-klasën e M që përmban a. Në qoftë se a është i rregullt, atëherë çdo element i D_a është i rregullt.

REZULTATE DHE DISKUTIME

Tani do të përcaktojmë një klasë të rëndësishme dhe speciale të Γ-gjysmëgrupeve të rregullt.

Dy elemente a dhe b të një Γ-gjysmëgrupi M janë përftues inversë të njeri-tjetrit në qoftë se

$$a=(axb)ya \ \wedge \ b=(bya)xb,$$

ku x, y $\in \Gamma$.

Pra, b është një (x, y)-invers i a, kurse a është një (y, x)-invers i b.

Teorema 2.2 tregon se elementi a i Γ-gjysmëgrupit M është i rregullt atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston të paktën një b $\in V_x^y(a)$. Gjatë vërtetimit, në qoftë se a=(axm)ya, po të merret b=(mya)xm gjejmë

$$a=(axb)ya \ \wedge \ b=(bya)xb.$$

Pra, elementet a dhe b janë përftues inverse të njeri-tjetrit.

Teoremë 2.7. Konditat e mëposhtme në një Γ-gjysmëgrup M janë ekuivalente:

(1) M është i rregullt dhe për çdo dy idempotentë e=exe dhe f=fxf, x, y $\in \Gamma$ kemi që f=fxf, eγf=fγe, $\forall \gamma \in \Gamma$.

(2) Çdo ideal kryesor i djathtë dhe çdo ideal kryesor i majtë i M ka përftues idempotent të vetëm.

(3) Çdo element i M ka një përftues invers të vetëm në M.

Vërtetim. (1) $\Longrightarrow$ (2) Duke ditur se çdo ideal kryesor i djathtë i M ka të paktën një përftues idempotent, pra, për a $\in$ M, ekziston e=exe, x $\in \Gamma$, i tillë që $(a)_r$=exM. Supozojmë se f është një idempotent, f=fyf, i tillë që exM=fyM. Tani gjejmë se e=fym dhe f=exn, për m, n $\in$ M. Mund të shkruajmë:

$$fxe=fx(fym)=(fxf)ym=fym=e$$

dhe

$$exf=ex(exn)=(exe)xn=exn=f.$$

Atëherë gjejmë

$$e=fxe=exf=f.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) Nga vërtetësia e (2) dhe teorema 2.4 del se çdo element i M është i rregullt. Teorema 2.2 tregon se çdo element a $\in$ M ka të paktën një përftues invers b. Në qoftë se c është një përftues invers tjetër i a, kemi:

$$a=(axb)ya, \quad b=(bya)xb, \quad x, y \in \Gamma,$$

$$a=(azc)ta, \quad c=(cta)zc, \quad z, t \in \Gamma.$$

Është e qartë se e=axb dhe f=azc janë idempotentë, e=eye dhe f=ftf. Gjithashtu edhe e′=bya dhe f′=cta janë idempotentë, e′=e′xe′ dhe f′=f′ z f′.

Meqenë qoftë se elementi a është i rregullt, kemi:

$$(a)_r=eyM=ftM,$$

$$(a)_l=Mye'=Mzf'.$$

Kështu, nga kondita (2) kemi:

$$e=axb=azc=f,$$

$$e'=bya=cta=f'.$$

Nga këto barazime gjejmë:

$$b=(bya)xb=by(axb)=by(azc)=(bya)zc=(cta)zc=c.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) Meqenë qoftë se çdo element i M ka përftues të vetëm, nga teorema 2.2, M është i rregullt. Kështu që do të tregojmë se plotëson konditat e pjesës së dytë të pikës (1). Pra, kemi që nga pohimi (3) rrjedh pohimi (1)

Nga teorema 2.2, çdo element i M është i rregullt. Kështu, le të jenë e=exe, f=fyf, x, y $\in \Gamma$, dy idempotentë të M. Së pari, do të vërtetojmë se eγf, $\gamma \in \Gamma$, është përsëri idempotent. Le të jetë a përftuesi inversiv i eγf,

$$((e\gamma f)x_1a)x_2(e\gamma f)=e\gamma f,$$

$$(ax_2(e\gamma f))x_1a=a,$$

ku x_1, $x_2 \in \Gamma$.

Marrim b=ax_2e. Gjejmë se:

$((e\gamma f)x_1(ax_2e))x(e\gamma f)=(e\gamma f)x_1((ax_2e)x(e\gamma f))=$
$(e\gamma f)x_1(ax_2(ex(e\gamma f)))$
$=$
$(e\gamma f)x_1(ax_2((exe)\gamma f))=(e\gamma f)x_1(ax_2(e\gamma f))$
$((e\gamma f)x_1a)x_2(e\gamma f))=(e\gamma f),$
$((ax_2e)x(e\gamma f))x_1(ax_2e)=(ax_2(ex(e\gamma f)))x_1(ax_2e)$ $(ax_2((exe)\gamma f))x_1(ax_2e)=$

$=(ax_2(e\gamma f))x_1(ax_2e)=((ax_2(e\gamma f))x_1 a)x_2e)=ax_2e.$

Këto barazime dhe kushti (3) sjellin se $b=ax_2e=a$.
Po të shënojmë $c=fx_1a$, përsëri gjejmë:

$$((e\gamma f)y(fx_1a))x_2(e\gamma f)=e\gamma f,$$
$$((fx_1a)x_2(e\gamma f))y(fx_1a)=fx_1a.$$

Përsëri këto barazime dhe kondita (3) sjellin se $c=fx_1a=a$. Kështu, do të kemi:

$a\gamma a=(ax_2e)\gamma(fx_1a)=ax_2(e\gamma(fx_1a))= ax_2((e\gamma f)x_1a)=$
$= (ax_2(e\gamma f))x_1a=a.$

Meqenë qoftë se një element idempotent është përftues invers i vetes, përsëri nga kondita (3) marrim $a=e\gamma f$, prej nga $e\gamma f$ është një idempotent i M. Gjithashtu, arrijmë në përfundimin se për çdo idempotent $e=exe$, $x \in \Gamma$, kemi që $e\gamma e=e$ për çdo $\gamma \in \Gamma$.

Tani le të jenë e dhe f dy γ-idempotentë per çdo $\gamma \in \Gamma$. Meqenë qoftë se e, f, $e\gamma f$ dhe $f\gamma e$ janë γ-idempotentë, kemi:

$((e\gamma f)\gamma(f\gamma e))\gamma(e\gamma f)=(e\gamma(f\gamma(f\gamma e)))\gamma(e\gamma f)=(e\gamma((f\gamma f)\gamma e))\gamma(e\gamma f) =$
$=$
$(e\gamma(f\gamma e))\gamma(e\gamma f)=e\gamma((f\gamma e)\gamma(e\gamma f))=(e\gamma f)\gamma(e\gamma f)=e\gamma f.$

Njëlloj tregohet se

$$((f\gamma e)\gamma(e\gamma f))\gamma(f\gamma e)=f\gamma e.$$

Pra, $e\gamma f$ dhe $f\gamma e$ janë inversë të njeri-tjetrit. Përsëri nga kondita (3) arrijmë në përfundimin se $e\gamma f=f\gamma e$.

Me Γ-gjysmëgrup inversiv kuptojmë Γ-gjysmëgrupin M që ka vetitë ekuivalente (1), (2) dhe (3).

Përkufizim 2.8. Elementi a i Γ-gjysmëgrupit M quhet plotësisht i rregullt në qoftë se ekziston $x \in \Gamma$, $b \in M$ të tillë që $a=(axb)xa$ dhe $axb=bxa$. Γ-gjysmëgrupi M quhet plotësisht i rregullt në qoftë se çdo element i tij është plotësisht i rregullt.

Teoremë 2.9. Në qoftë se elementi $a=(axb)xa$, $x \in \Gamma$, $b \in M$, është plotësisht i rregullt, atëherë ekziston elementi $c \in V_x^x(a)$ i tillë që

$$axc=cxa.$$

Vërtetim. Shënojmë me $c=(bxa)xb$. Kemi:

$$(axc)xa=(ax((bxa)xb))xa=((ax(bxa))xb)xa=(axb)xa=a,$$

$(cxa)xc=(((bxa)xb))xc=((bx(axb)xa)xc=(bx((axb)xa))xc=(bxa)xc =$

$=(bxa)x((bxa)xb)=bx(ax((bxa)xb))=bx((ax(bxa))xb)=bx(axb) =$
$=(bxa)xb=c.$

Gjithashtu gjejmë:

$axc=ax((bxa)xb)=(ax(bxa))xb=axb=bxa=$
$=bx((axb)xa)=(bx(axb))xa=cxa.$

Teoremë 2.10. Një Γ-gjysmëgrup M është plotësisht i rregullt atëherë dhe vetëm atëherë kur çdo kuazi-ideal i M është Γ-nëngjysmëgrup plotësisht i rregullt.

Vërtetim. Le të jetë Q një kuazi-ideal i Γ-gjysmëgrupit plotësisht të rregullt M dhe $a \in Q$. Nga teorema 2.9 ekziston elementin $c \in V_x^x(a)$ i tillë që $axc=cxa$, pra

$$a=(axc)xa \text{ dhe } c=(cxa)xc.$$

Prej këtej $(a)_q=(c)_q$. Pra, $c \in (a)_q \subset Q$ dhe si rrjedhim Q është plotësisht i rregullt.

E anasjella është e qartë.

Në klasën e Γ-gjysmëgrupeve të rregullta nënklasa e Γ-gjysmëgrupeve plotësisht të rregullta mund të karakterizohet me anën e kuazi-idealeve. Problemet që lidhen me kuazi-idealet janë studiuar në artikujt [1], [2], [3]. Karakterizimin për këtë nënklasë mund ta realizojmë me:

Teoremë 2.11. Një Γ-gjysmëgrup M është plotësisht i rregullt atëherë dhe vetëm atëherë kur për çdo $a \in M$ ekziston një element invers b i a i tillë që $(a)_q=(b)_q$.

Vërtetim. Le të jetë M një Γ-gjysmëgrup plotësisht i rregullt dhe $a \in M$. Nga teorema 2.9.

ekziston c $\in V_x^x(a)$ i tillë që axc=cxa. Ashtu si te teorema e mësipërme tregohet $(a)_q=(b)_q$.

Anasjellas, le të jetë a një element i Γ-gjysmëgrupit të rregullt M për të cilin ekziston b $\in V_x^x(a)$ i tillë që $(a)_q=(b)_q$. Meqenë qoftë se

$$a=(axb)ya,\ b=(bya)xb=by(axb),$$

atëherë kemi:

$$(a)_r \subset (axb)_r,\ (b)_l \subset (axb)_l\ .$$

Përfshirjet:

$$(axb)_r \subset (a)_r,\ \ (axb)_l \subset (b)_l$$

janë fare të qarta.

Nga përfshirjet e mësipërme, përfitojmë barazimet:

$$(a)_r=(axb)_r,\ (b)_l=(axb)_l\ .$$

Nga barazimi $(a)_q=(a)_r \cap (a)_l=(b)_r \cap (b)_l=(b)_q$ gjejmë

$$(a)_l=(b)_l,\ \ (a)_r=(b)_r.$$

Tani, si përfundim, kemi

$$(a)_l=(b)_l,\ \ (a)_r=(b)_r.$$

Pra,

$$(a)_q=(b)_q=(axb)_q.$$

Nga teorema 1.6, meqenë qoftë se a, b dhe axb i përkasin të njëjtës H-klasë H_a të përftuar të kuazi-idealit kryesor $(a)_q$, atëherë H_a është H^x grup. Shënojmë me e njëshin e grupit H^x. Atëherë kemi axb=bxa=e. Ndërkohë kemi:

$$a=axe=ax(bxa)=(axb)xa,$$
$$b=bxe=bx(axb)=(bxa)xb.$$

Pra, b $\in V_x^x(a)$. Kështu Γ-gjysmëgrupi M është plotësisht i rregullt.

BIBLIOGRAFIA

1. Braja I (2008) Equivalences in regular Γ-semigroups, The scientific bulletin UNIEL Proceding, 3, 85-90.
2. Braja I (2007) Kuazi-idealet minimal dhe bi-idealet në Γ-gjysmëgrupet. Buletini shkencor UNIEL, 3, 29-35.
3. Braja I (2008) Karakterizime të disa klasave të Γ-gjysmëgrupeve me anë të idealeve", Buletini shkencor UNIEL, 4, 13-21.
4. Dutta TK, Chatterjee TK (1987) Green's equivalences on Γ-semigroup". Bull. Col. Soc. 80, 30-35.
5. Petro P, Xhillari Th (2008) Teorema e Green-it dhe kuazi-idealet minimale, Konferenca Ndërkombëtare e Algjebrës dhe Analizës Funksionale, Buletini shkencor UNIEL, Procedings, 3.
6. Saha NK (1987) On Γ-semigroup-II, Bull. Col. Math. Soc. 79, 331-335.
7. Saha NK (1988) On Γ-semigroup-III, Bull. Col. Math. Soc. 80, 1-12.
8. Sen MK, Saha NK (1988) On Γ-semigroup, I. Bull. Col. Math. Soc. 80, Saha NK, 180-187.